Erster Brief von Johann Hudde über die Reduktion von Gleichungen *

Johann Hudde

Ich bedauere, meine teuerster Freund, dass ich, von schlechter Gesundtheit und anderen Aufgaben verhindert, deiner freundschaftlichen Bitte, diese Dinge weiter auszuführen, welche ich über die Reduktion von Gleichungen einem anderen gewissen Freund vor einigen Jahren kurz mitgeteilt hatte, bisher nicht habe nachkommen können. Daher möchte ich nun ein wenig Zeit dafür aufbringen (obgleich ich kaum etwas derselben habe), damit ich meine Versprechen, wenn schon nicht ganz, zumindest teilweise einlöse, und damit dir die allzu lange Wartezeit nicht allzu sehr aufstößt und ich bei dir nicht in einem schlechten Licht dastehe; obgleich du mir nicht zu Unrecht diese Unsitte anzulasten könntest, möchte ich dennoch, dass du des folgenden Belgischen Sprichwortes eingedenk bist:

Die noch wat betaalt/ wil noch betalen/ en is van de quaatste slagh niet.

Was also die *Reduktion von Gleichungen* angeht, betrachte ich sie auf zwei Weisen, je nachedem, ob die Gleichung *absolut* betrachtet werden kann, oder ob sich jene *relativ* auf ein Problem, aus welchem sie ihren Usprung nahm, beziehen lässt.

Zuerst werde ich sie aber *absolut* betrachten, wobei also die gewöhnliche Reduktion, die per Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division und Extraktion geschieht, zunächst beiseite gelassen worden ist: Und ich werde nur gewisse Regeln formulieren, von welchen ich die meisten vor nicht allzu langer Zeit gefunden habe, und werde sie mit Beispielen, damit du meinen

*Originaltitel: “Johannis Huddenii Epistula prima de Reductione Aequationum“, zuerst publiziert in „*Geometria a Renato Descartes*, 1637, pp. 407-506“, übersetzt von: Alexander Aycock im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

Gedankengang besser nachvollziehen kannst, illustrieren, wobei ich aber deren Beweise hier nicht führen werde, sowohl weil der größte Teil derer sehr leicht zu finden ist, als auch weil es die Hauptsache ist, was anderen Menschen missfiele, sie dir (dem, was in der Mathematik anderen unzugänglich erscheint, offenkundig ist) lediglich mitzuteilen.

Und um meine Ideen besser zu vermitteln, werde ich meine Regeln zunächst auf die Gleichungen beschränken, in denen nur eine unbekannte Größe gefunden wird, welche Größe ich immer x nennen werde; und in denen der erste Term (als ersten Term bezeichne ich denjenigen, in welchem x die höchste Dimension hat; als zweiten den, wo x um eine Dimension kleiner ist, und so weiter) nicht mit einer anderen bekannten Größe multipliziert oder durch selbige geteilt worden ist, und immer mit dem Vorzeichen $+$ behaftet ist; weil wir auf diese Weise nicht nur alle Gleichungen zu betrachen pflegen, sondern auch weil sie ohne oder mit nur geringem Aufwand, wie jedem bekannt ist, auf eine solche Form, wenn sie sie noch nicht haben, gebracht werden können.

Die folgenden neun Regeln erstrecken sich auf alle Gleichungen, ob in ihnen irrationale und gebrochene Grössen oder keine von beiden gefunden werden.

1. Regel

Wenn in der literalen Gleichung[1] einer oder mehrere Buchstaben oder bekannte Größen $= 0$ angenommen werden, und dann der *letzte Term nicht verschwindet*, und die Gleichung, die daraus resultiert, nicht reduzibel ist, ist es gewiss, dass auch die vorgelegte nicht Gleichung nicht reduzibel sein wird; aber wenn hingegen der *letzte Term verschwindet*, und auch die daraus resultierende Gleichung nicht reduzibel ist, wird die vorlegte Gleichung nicht auf eine von geringerer Dimension als die resultierende reduziert werden können.

Beispiel, in welchem der letzte Term nicht verschwindet.

Wenn in der Gleichung

[1] Damit meint Hudde stets Gleichungen, in denen der Buchstabe x und bzw. oder andere auftreten.

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3axx & + 2bbx & - 3a^3 & = 0 \\ \quad - b & + 3ab & - b^3 & \\ & + 4aa & - 5aab & \\ & & - 4bba & \end{array}$$

$a = 0$ angenommen wird, so wird daraus die Gleichung $x^3 - bxx + 2bbx - b^3 = 0$ resultieren. Aber weil diese Gleichung nicht reduzibel ist, ist es gewiss, dass auch die vorgelegte auch nicht reduzibel sein wird.

Beispiel, in welchem der letzte Term verschwindet.

Wenn in der Gleichung

$$\begin{array}{lllllll} x^6 - 6abx^4 & + 6c^3x^3 & + 6a^3bxx & - 12aac^3x & + 12c^5d & = 0 \\ \quad - 3aa & + ccd & & - 6abccd & - 12abbc & \\ & - bba & & + 6aab^3 & & \end{array}$$

d und $a = 0$ angenommen werden, resultiert daraus $x^3 + 6c^3 = 0$. Weil diese Gleichung dreier Dimensionen nicht reduziert werden kann, ist dies eine Begründung dafür, dass auch die vorgelegte nicht auf geringere Dimensionen als drei reduzierbar sein wird.
So werden, indem man d und $b = 0$ oder nur $c = 0$ annimmt, diese zwei Gleichungen entspringen

$$x^5 - 3aax^3 + 6c^3xx - 12aac^3 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^5 - 6abx^3 - bbaxx + 6a^3bx + 6aab^3 = 0 \\ \quad - 3aa \end{array}$$

Wenn diese nicht reduziert werden können, werden sie anzeigen, dass die vorgelegte Gleichung nicht auf weniger Dimensionen als 5 reduziert werden kann.
Ich sage, *dass jene nicht auf weniger Dimensionen reduzierbar ist*, zumal es ja irgendwann gelingen kann, dass die vorgelegte Gleichung auf dieselbe Anzahl an Dimensionen reduzierbar ist. So wie es sich bei dieser Gleichung zuträgt: $x^4 - 4ax^3 + 4aaxx + 2b^3x - 4ab^3 = 0$, indem man $a = 0$ annimmt: Denn es entspringt $x^3 + 2b^3 = 0$, welche nicht reduziert werden kann, und dennoch ist die vorgelegte Gleichung durch $x - 2a = 0$ teilbar.

2. Regel

Wenn in der literalen Gleichung für eine oder mehrere oder alle Buchstaben oder für die bekannten Größen Zahlen oder andere Größen nach Belieben angenommen werden, und dann *der letzte Term nicht verschwindet*, und die Gleichung, ob eine numerale oder eine literale, die daraus entspringt, nicht reduzierbar wird, ist gewiss, dass auch die vorgelegte Gleichung nicht reduzierbar sein wird; wenn hingegen *der letzte Term verschwindet*, und auch die daher resultierende Gleichung nicht reduzierbar ist, so wird die vorgelegte Gleichung nicht auf weniger Dimensionen als die resultierende reduziert werden können.

Beispiel, in welchem der letzte Term nicht verschwindet

1. Wenn in dieser Gleichung

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2axx & + 3bbx & - 3a^3 & = 0 \\ \quad - b & + 3ab & - 3b^3 & \\ & + 4aa & - 6aab & \\ & & + 9abb & \end{array}$$

$a = 1$ und $b = 1$ angenommen werden, wird daraus die numerale Gleichung $x^3 - 3xx + 10x - 3 = 0$ resultieren. Diese, weil sie ja nicht reduzibel ist, wird anzeigen, dass auch die vorgelegte Gleichung nicht reduzibel ist.

2. So wird auch, wenn wir diese Gleichung haben

$$\begin{array}{lll} x^5 + aabb & x - 20a^4 & = 0 \\ \quad - \dfrac{3a^3bb}{a-b} & - \dfrac{2}{3}b^3aa, & \end{array}$$

und wir $4aabb = \frac{3a^3bb}{a-b}$ oder $b = \frac{1}{4}a$ annehmen, daraus $x^5 - 2\frac{49}{96}a^5 = 0$ entspringen. Weil aber diese Gleichung nicht reduziert werden kann, ist gewiss, dass auch die vorgelegte nicht reduzibel sein wird.

3. Genauso, wenn in der Gleichung

$$
\begin{aligned}
x^5 - 8a^3 \;\; xx + 4ca^3x - 2a^3cd &= 0 \\
- 2aac \quad\;\; + accd &
\end{aligned}
$$

$-8a^3 - 2aac = 0$ oder $c = -4a$ sowie $4ca^3 + accd = 0$ oder $d = -\frac{4aa}{c}$ angenommen wird, wird daher $x^5 + 8a^5 = 0$ werden. Weil ja aber diese Gleichung nicht reduzibel ist, *so ist gewiss, dass etc.*

4. In gleicher Weise verhält sich die Sache bei Gleichungen, in denen irrationale Größen gefunden werden: Denn, eines Beispiels wegen, wenn diese Gleichung gegeben ist $x^5 + xx\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} + a^3b\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{27}abb} = 0$, wird, indem man $\frac{1}{4}aa + bb = 0$ oder $bb = -\frac{1}{4}aa$ setzt, $x^5 + a^3b\sqrt[3]{\frac{25}{216}a^3} = 0$ resultieren, welche, weil sie nicht reduziert werden kann, *gewiss ist, etc.*

Beispiele, in welchen die resultierende Gleichung weniger Dimensionen als the vorgelegte hat.

1. Wenn man

$$
\begin{aligned}
x^5 + 4cx^3 + 4cc\,xx &- 4bbcx - b^4 = 0 \\
- dd \qquad\quad &\;\; - bbdd \\
- 2bb \qquad\quad &
\end{aligned}
$$

hat und $c = 1$, $b = 1$, $d = 1$ annimmt, wird daraus die numerale Gleichung $x^3 + 4xx - 1x - 4 = 0$ resultieren. Weil aber diese Gleichung von drei Dimensionen nicht reduzibel ist, wird auch die vorgelegte Gleichung nicht auf weniger Dimensionen als drei reduziert werden können.

Wenn

$$
\begin{aligned}
x^3 - \frac{1}{4}aa\sqrt{xx + aa - bb} + 3axx + \frac{1}{4}abx - aab \qquad &= 0 \\
+ bb\sqrt{3aa + bb} &
\end{aligned}
$$

vorgelegt ist und $aa - bb = 0$ oder $a = b$ angenommen wird, wird $x^3 + 3xx + a^3 = 0$ resultieren, welche auch nicht reduziert können wird, und daher anzeigen wird, dass die vorgelegte Gleichung nicht auf weniger als auf drei

Dimensionen reduziert werden kann.
Ich sage, *dass jene nicht auf weniger Dimensionen reduzierbar sein wird*, es kann jedoch freilich irgendwann einmal passieren, dass die vorgelegte Gleichung auf dieselbe Anzahl an Dimensionen reduzierbar ist. Das hatte auch bei der 1. Regel Geltung, und ist dort erklärt worden. Aber wenn du fragst, wie viele Dimensionen ich dem 2. Beispiel zuschreibe, so antworte ich, dass ich jeder Gleichung so viele Dimensionen zuschreibe, wie ihre unbekannte Größe höchstens hat, nachdem alle Wurzelzeichen weggeschafft worden sind, welche jene Unbekannte Größe einschließen: Und daher wird jenes 2. Beispiel 6 Dimensionen haben, nachdem das Wurzelzeichen vor jener unbekannten Größe, nämlich $\sqrt{xx + aa - bb}$, weggeschafft worden ist.

Zwei Anmerkungen zu dieser 1. und 2. Regel

I. Es ist anzumerken, dass jede der beiden Regeln nicht nur einen großen Nutzen bei der Untersuchung hat, ob eine literale Gleichung reduzibel ist, sondern auch auf dieselbe Weise untersucht werden kann,
1. ob jene Gleichung oder auch eine gewisse zusammengesetzte Größe durch eine andere Gleichung oder Größe, welche rational ist, geteilt werden kann,
2. ob sie eine Quadratwurzel, eine Kubikwurzel oder eine andere Wurzel zulässt
3. ob zwei oder mehr Gleichungen, oder besagte Größen, einen gemeinsamen Teiler zulassen.

Denn, *wenn sie einen rationalen Teiler oder irgendeine Wurzel, oder einen gemeinsamen Teiler zulassen*, wird jenes meist, indem man dem gerade erläuterten Weg folgt, entweder auf einen Blick oder zumindest sehr leicht erkannt werden; außerdem würde dies bei sehr zusammengesetzten und aus vielen verschiedenen Buchstaben bestehenden Gleichungen oder Größen, einem anderen Weg folgend, sehr große Arbeit und Mühe verlangen. Denn diese Methode erfordert nur, dass Gleichungen oder besagte Größen (indem man einen oder mehrere Buchstaben gleich Null oder der Einheit oder einer Zahl oder einer nach Belieben anzunehmenden Größe gleich annimmt) zu den anderen bestimmt werden, von welchen wir wissen, dass sie keine Reduktion oder rationalen Teiler oder irgendeine Wurzel oder einen gemeinsamen Teiler zulassen. All dies anhand von Beispielen zu erklären, wird überflüssig sein, genauso wie die ganzen Anwendungen dieser Methode aufzulisten, welche hinreichend groß zu sein ja bereits klar geworden ist; und weil sie auch nicht

von Brüchen und irrationalen Größen eingeschränkt wird, wird sie nicht selten eine große Abkürzung darstellen.
Scließlich, *wenn Gleichungen oder zusammengesetzte Größen eine Reduktion oder einen rationalen Teiler oder eine Wurzel oder einen gemeinsamen Teiler zulassen*, können all jene auch in vielen Fällen mit dieser Methode hinreichend schnell gefunden werden. Aber dies werde ich nicht an dieser Stelle, sondern vielleicht anderenortes bei der Besprechung eines anderen Gegenstands aufzeigen.

II. Was ich mit *der aus der vorgelegten resultierenden Gleichung* meine, scheint notwendig, dass ich es ein wenig ausführlicher erkläre: Besonders, weil es auch bei den folgenden Regeln, wo irgendein anderer Buchstabe $= 0$ angenommen wird, seinen Nutzen haben wird. Wannimmer nämlich ein oder mehrere Buchstaben oder Größen $= 0$ angenommen werden, ist es offenkundig, dass alle Größen, die aus der Multiplikation von diesen mit anderen entstanden sind, auch zu Null werden und daher in der vorgelegten Gleichung notwendigerweise verschwinden, so wie es in den ewähnten Beispielen gesehen worden ist zu passieren. Wie dies in den Gleichungen, welche keine literalen Brüche einschließen, geschieht, wird man durch die resultierende Gleichung einsehen. Wenn aber literale Brüche gegeben sind, dann könnte freilich leicht, wenn man nicht große Sorgfalt walten lässt, ein Fehler begangen werden. Denn, wenn der Zähler der Bruches $= 0$ ist, ist dieser Bruch aus der vorgelegten Gleichung zu entfernen; aber wenn der Nenner $= 0$ ist, so ist es nötig, dass alle Terme der Gleichung zuerst mit einem Nenner solcher Art multipliziert werden. Nachdem dies getan worden ist, wird diese Gleichung, in welcher natürlich kein weiterer literaler Bruch gefunden wird, dessen Nenner $= 0$ wäre und in welcher alle angenommenen Bedingungen oder Annahmen erfüllt sind, jene sein, welche ich als aus der vorgelegten zu resultieren bezeichne.

Beispiele

Vorgelegte Gleichungen	Restltierende Gleichungen

$$
\begin{array}{llll}
xx - \dfrac{cc}{a} & x + cc & = 0 & \text{man nehme an} \quad c = 0 \qquad xx + b\;\, x - 4aa = 0 \\
\quad + b & \quad - aa & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; + ab \\
& \quad - \dfrac{ccb}{a} & & \qquad\qquad\quad\;\; a = 0 \qquad - cc\, x - ccb = 0 \quad \text{oder } x + b = 0 \\
& \quad + ab & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
xx - c & x + \dfrac{c^3}{2a} & = 0 & \qquad\qquad\quad\;\; c = 0 \qquad xx + a\;\, x \qquad = 0, \quad \text{oder } x + a = 0 \\
\quad + b & \quad - \dfrac{1}{2}cc & & \\
\quad + \dfrac{ac}{a+b} & \quad - \dfrac{cca}{2a+2b} & & \qquad\qquad\quad\;\; a = 0 \qquad - \dfrac{cc}{2}x - \dfrac{c^3}{2} = 0 \quad \text{oder } x + c = 0 \\
& \quad + ab & &
\end{array}
$$

$$x^5 + \frac{2ac - ab}{3a - b}xx + \frac{6cb^3}{3aa - ab}x + \frac{b^3a^3}{a+b} = 0,$$

nachdem $2a - b = 0$ angenommen worden ist, wird man $(ac - ab)xx + \frac{ccb^3}{a}x = 0$ oder

$$
\begin{array}{l}
+\, 2acx + \dfrac{ccb^3}{a} = 0. \\
-\, ab
\end{array}
$$

haben. Daher, wenn die Annahme $3a = b$ erfüllt worden ist, resultiert

$$
\begin{array}{l}
+\, 2acx + 27aacc = 0 \\
-\, 3aa.
\end{array}
$$

Und dies ist nicht nur bei Gleichungen zu beobachten, sondern auch bei zusammengesetzen Größen, deren gemeinsames Maß oder Teiler oder Wurzel verlangt wird. Wie, eines Beispiels wegen, wenn du untersuchen möchtest, ob $\sqrt{Q}$[2] aus $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc-2cd+dd} + 2bb$ gezogen werden kann und du für

[2]Damit ist einfach die Quadratwurzel gemeint, Q steht dabei für Quadrat, im Weiteren Verlauf werden wir stets einfach das moderne Zeichen $\sqrt{\ }$ schreiben.

dieses Ziel $cc - 2cd + dd = 0$ angenommen hättest: so wäre b^4 beizubehalten, aber nicht $2bb$. Wenn du nämlich $2bb$ behieltest, wäre zu schließen, wenn du meiner Methode folgst, dass $\surd$ aus $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc-2cd+dd} + 2bb$ nicht gezogen werden könnte, welche dennoch $c - d + \frac{bb}{c-d}$ ist.

Die folgenden Regeln 3,4 und 5 erstrecken sich auf alle Gleichungen, die aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden können, in der einen von welchen ein Buchstabe enthalten ist, welcher in der anderen nicht enthalten ist.

3. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung zu reduzieren, die aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von welchen eine einen Buchstaben *umfasst, welcher in der anderen nicht enthalten ist; und welcher* Buchstabe *nicht dieselbe Anzahl an Dimensionen in den verschiedenen Termen hat.*

Ich nehme alle Größen der vorgelegten Gleichung, in welchen *derselbe Buchstabe* gefunden wird, und welche zugleich so geteilt werden können, dass jener Buchstabe verschwindet, $= 0$ an. Und dies tue ich *bei den einzelnen Buchstaben*, aber *nur auf eine einzige Weise.* Selbstredend kann dies manchmal auf verschiedene Weisen gesehen, in welchem Fall jene vor allen anderen auszuwählen sind, welche die leichtesten Gleichungen ergeben, oder mit welchen sich am schnellsten zum Ziel gelangen lässt. Und, wenn die vorgelegte Gleichung aus zwei besagten Gleichungen solcher Art erzeugt werden kann, so wird sie auch durch eine dieser erdachten Gleichungen, in denen die besagten *Buchstaben* entfernt worden sind, teilbar sein.

1\. *Gattung von Beispielen, in denen die vorgelegten Gleichungen weder numerische noch literale Brüche enthalten.*

1\. Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{llll} x^4 - 6ax^3 & +4bc\ \ xx & -16abcx & +16bbca = 0 \\ & +4ac & -16aac & +48aabc \\ & +16aa & -8aab & +32a^3c \\ & +4ab & -16a^3 & \end{array}$$

Zuerst mache ich daher einen Versuch beim Buchstaben a, indem ich $-16a^3x + 32a^3c = 0$ annehme. Es sind all diese Größen durch a^3 teilbar, die in der vorgelegten Gleichung gefunden werden und in denen nach der Division der Buchstabe a verschwindet. Denn es entspringt $-16x + 32c = 0$ oder, indem man durch -16 teilt, $x - 2c = 0$.

Nun probiere ich, ob die vorgelegte Gleichung durch $x - 2c = 0$ geteilt werden kann. Denn wenn sie durch diese nicht geteilt werden kann, *natürlich wenn diese $x - 2c = 0$ nicht bruchfrei wäre, (was dieser ersten Gattung von Beispielen freilich zu eigen ist)*, wäre ich zu einem anderen Buchstaben übergegangen. (Denn obgleich noch andere Größen in der Gleichung gefunden werden, in denen a enthalten ist, und sie alle durch eine andere als a^3 dividiert werden können, so wie der Buchstabe a überall verschwindet, indem man natürlich folgendes annimmt

$$\begin{aligned} &+ 16aaxx - 16aacx + 48aabc = 0 \\ & - 8aab \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &- 6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca = 0 \\ & + 4ab \end{aligned}$$

genügt es dennoch, das bei dieser Regel *auf eine einzige Weise* versucht zu haben.) Daher weil die vorgelegte Gleichung nicht durch $x - 2c = 0$ teilbar ist, gehe ich zu einem anderen Buchstaben über, zum Beispiel b. Weil ja aber hier nur eine Größe vorhanden ist, in welcher bb gefunden wird, nämlich $16bbca$, gehe ich auch deswegen zum nächsten über, weil ja durch $16bbca$ kein Wert von x erhalten werden kann, und betrachte den Buchstaben c, indem ich festlege:

$$\begin{aligned} &4bcxx - 16abcx + 16bbac = 0 \\ &4ac \quad\; - 16aac \;\; + 48aabc \\ & + 32a^3c \end{aligned}$$

Weil diese also ohne Rest durch $4bc + 4ac$ geteilt wird und

$$\begin{aligned} &xx - 4ax + 4ab = 0 \\ & + 8aa \end{aligned}$$

entspringt, so bleibt es weiter zu untersuchen, ob die vorgelete Gleichung durch

$$\begin{aligned} xx - 4ax + 4ab &= 0 \\ + 8aa & \end{aligned}$$

geteilt werden kann und man findet, dass diese Division möglich ist.

Ich habe gesagt, *dass es* bei dieser Regel *genügt, die Sache bei den einzelnen Buchstaben nur auf eine einzige Art versucht zu haben, und dass jene Arten, die die leichtesten Gleichungen an die Hand geben oder auf welche sich am schnellsten von allen zum Ziel gelangen lässt, den übrigen vorzuziehen sind.* So wäre ich nämlich einen kürzeren Weg gegangen, wenn ich die Größen genommen hätte, in denen a überall nur eine Dimension hat. Denn weil ich ja dann $-6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca = 0$ erhalte, ist auf den ersten Blick klar, weil 4 durch 6 nicht geteilt werden kann, dass diese Größen nicht ohne Rest geteilt werden können.

2. Auf dieselbe Weise, um diese Gleichung zu reduzieren

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3cxx & + ab & x - 2aab & = 0 \\ \quad - 2a & + 6ac & + 3abb & \\ \quad + 3b & - 9bc & & \end{array}$$

weil die Größe $-2aab$ in ihr isoliert aufgefunden wird, in welcher a zwei Dimensionen hat, und zudem die Größe $+3abb$ allein stehend aufgefunden wird, in welcher b zwei Dimensionen hat, gehe ich deshalb zum Buchstaben c über, und erhalte

$$\begin{array}{lcl} -3cxx + 6acx = 0 & \quad \text{oder} \quad & -3cx + 6ac = 0 \\ \qquad - 9bc & & \qquad - 9bc \end{array}$$

Diese gibt durch $-3c$ geteilt

$$\begin{aligned} x - 2a &= 0 \\ + 3b & \end{aligned}$$

Mithilfe dieser kann die vorgelegte Gleichung geteilt werden. Das, wenn es sich anders ereignet hätte, nachdem schon der Versuch bei allen Buchstaben gemacht worden ist, wäre ein Anzeichen gewesen, dass die vorgelegte Gleichung aus zwei anderen solcher Art, wie ich sie oben definiert habe, nicht erzeugt werden kann.

3. In ähnlicher Weise mit dem Vorhaben diese Gleichung zu untersuchen

$$\begin{array}{lll} x^3 + b & xx + 2b\sqrt{ab+3bb}x - 6bb\sqrt{ab+3bb} = 0 \\ \quad - \sqrt{ab+3bb} & \qquad\qquad\qquad + 18b^3 \end{array}$$

beginned mit dem Buchstaben a finde die Gleichung $-\sqrt{ab+3bb}xx + 2b\sqrt{ab+3bb}x - 6bb\sqrt{ab+3bb} = 0$. Diese teile ich durch $-\sqrt{a+3bb}$, und a verschwindet, und ich erhalte diese $xx - 2bx + 6bb = 0$, durch welche die vorgelegte geteilt werden kann. Wenn diese aber diese Division nicht hätte geschehen können, wäre zum Buchstaben b voranzuschreiten gewesen. Weil ja aber klar ist, dass durch b, gemäß der seiner einzelnen Dimensionen betrachtet, kein Wert von x gefunden werden kann, hätte ich gefolgert, wie zuvor, dass die vorgelegte Gleichung aus zwei anderen solcher Art, wie ich sie oben definiert habe, nicht gebildet werden kann.

4. Nicht anders verhält sich die Sache bei dieser Gleichung

$$\begin{array}{llll} x^3 - xx\sqrt{xx+aa} - 2cxx & + 2cx\sqrt{xx+aa} & - acx - a\sqrt{3cc+aa} \text{ mal } \sqrt{xx+aa} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 2a & + ax\ \sqrt{xx+aa} & - aax + 3aa\sqrt{3cc+aa} \\ & + ax\ \sqrt{3cc+aa} & \end{array}$$

Denn zuerst sehe ich, dass der Buchstabe a missachtet werden kann, weil $-3aax$ allein aufgefunden wird, und auch kein anderer da ist, welcher durch aa so geteilt werden kann, dass a selbst völlig verschwindet. Ich gehe deshalb zum Buchstaben c über, indem ich annehme

$$-2cxx + 2cx\sqrt{xx+aa} - 6acx = 0 \quad \text{oder} \quad -2cx + 2c\sqrt{xx+aa} - 6ac = 0$$

und es ist, indem überall durch $-2c$ geteilt wird, $x\sqrt{xx+aa} + 3a = 0$. Mit deren Hilfe lässt sich die vorgelegte Gleichung teilen. Wenn diese durch jene nicht geteilt werden könnte, weil die Sache ja schon bei den anderen Buchstaben probiert worden ist, hätte ich wie zuvor gefolgert, dass die vorgelegte Gleichung, etc.

2. *Gattung von Beispielen, in denen die vorgelegten Gleichungen Brüche enthalten.*

Zwischen diesem und den vorhergehenden Beispielen besteht in Bezug auf die Operation kein anderer Unterschied, als dass die fiktive Gleichung, durch welche man die vorgelegte zu teilen versucht, nicht notwendigerweise, so wie dort, von allen Brüchen befreit sein muss. Deshalb wird es ausreichend sein hier nur ein Beispiel präsentiert zu haben.

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{llll} x^3 + \dfrac{2bb}{a+c}xx & + \dfrac{bba}{a+c}x & - \dfrac{1}{2}a^3 & = 0 \\ \quad + 2b & + \dfrac{3}{4}aa & + \dfrac{1}{2}acc & \\ & - cc & + 2abb & \\ & + ab & - 2cbb & \\ & & - 2aab & \\ & & - 2bcc & \end{array}$$

Ich übergehe den Buchstaben a, wegen der Größe $-\frac{1}{2}a^3$, weil ja a nirgends mit mehr als mit 3 Dimensionen gefunden wird. Daher, zu b übergehend, finde ich $2bxx + abx + 2aab - 2ccb = 0$, oder, überall durch $2b$ dividierend

$$\begin{array}{l} xx + \dfrac{1}{2}ax + aa = 0 \\ \qquad\qquad\quad - cc \end{array}$$

durch welche die vorgelegte geteilt werden kann. Wenn aber diese Teilung nicht möglich gewesen wäre, hätte ich gefolgert, weil nur noch der Buchstabe c zu untersuchen gewesen wäre, und dieses c nicht mehr als der Buchstabe a, so wie aus der Größe $-2cbb$ offenkundig ist, irgendetwas zu dieser Sache beiträgt, dass die vorgelegte Gleichung aus zwei anderen solcher Art, wie ich sie oben definiert habe, nicht erzeugt werden kann.

Aber die Ordnung, welche ich bei dieser Untersuchung, ob die vorgelegte

Gleichung durch fiktive Gleichungen von dieser Art teilbar ist, einhalte, ist die folgende: Zuerst untersuche ich, ob keine anderen Größen, in denen dieser weggeschaffte Buchstabe aufgefunden wird, in der vorgelegten Gleichung auftreten. Wenn nämlich mehrere aufgefunden werden, dann fasse ich alle, die so durch jene geteilt werden können, dass er überall verschwindet, zu einer Summe zusammen. (Wie in diesem Bespiel alle Größen, in denen b zwei Dimensionen hat.) Nachdem dies getan worden ist, wenn der Quotient nicht derselbe ist wie der vorgehende, die Division durch welchen untersucht wird, schließe ich, dass diese Teilung nicht möglich ist. Schließlich, wenn in der vorgelegten Gleichung keine weiteren Größen enthalten sind, in denen der besagte Buchstabe gefunden wird, teile ich als letztes durch jene fiktive Gleichung all die übrigen Größen, in denen jener Buchstabe nicht aufgefunden wird; und welche zugleich durch die besagte fiktive Gleichung teilbar sein werden, wenn freilich die vorgelegte Gleichung durch sie teilbar ist.

Wie $2bxx + abx + 2aab - 2bcc = 0$ durch $+2b$ geteilt ist

$$\begin{aligned} xx + \frac{1}{2}ax + aa &= 0 \\ - cc & \end{aligned}$$

ist ebenso

$$\begin{aligned} \frac{2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + 2abb &= 0 \\ - 2cbb & \end{aligned}$$

durch $+\frac{2bb}{a+c}$ geteilt

$$\begin{aligned} + xx + \frac{1}{2}ax + aa &= 0 \\ - cc & \end{aligned}$$

Wenn also dieser Quotient mit dem vorhergehenden nicht übereingestimmt hätte, so wäre auch die vorgelegte Gleichung durch

$$\begin{aligned} + xx + \frac{1}{2}ax + aa &= 0 \\ - cc & \end{aligned}$$

nicht teilbar gewesen. Weil sie ja aber übereinstimmen und keine weiteren Größen in der vorgelegten Gleichung übrig sind, in denen der Buchstabe b aufgefunden wird, untersuche ich schließlich, ob auch alle übrigen durch

$$\begin{array}{l} +\,xx + \frac{1}{2}ax + aa = 0 \\ \qquad\qquad\quad -\,cc \end{array}$$

geteilt werden können. Daher, weil die übrigen Größen, in denen b nicht aufgefunden wird, diese sind

$$\begin{array}{lll} x^3 & + \frac{3}{4}aax & - \frac{1}{2}a^3 \\ & -\,cc & + \frac{1}{2}acc \end{array}$$

und selbige durch

$$\begin{array}{l} +\,xx + \frac{1}{2}ax + aa = 0 \\ \qquad\qquad\quad -\,cc \end{array}$$

geteilt werden können und $x - \frac{1}{2}a$ entspringt, so wird deshalb auch die vorgelegte Gleichung durch

$$\begin{array}{l} +\,xx + \frac{1}{2}ax + aa = 0 \\ \qquad\qquad\quad -\,cc \end{array}$$

geteilt werden können. Diese hätte ansonsten, wie offenkundig ist, durch jene nicht geteilt werden können, wenn diese letzte Division nicht möglich gewesen wäre; der Quotient ist aber $x - \frac{1}{2}a + \frac{2bb}{a+c} + 2b = 0$.

4. Regel

welche die Art lehrt alle Gleichungen zu reduzieren, die aus der Multiplikation zweier anderer, von welchen die eine den einen Buchstaben *umfasst, welcher in der anderen nicht enthalten ist; und welcher* Buchstabe *in einem Term so viele Dimensionen hat* *wie in keinem anderen.*

Ich nehme alle Größen der vorgelegten Gleichung, in denen *derselbe Buchstabe* gefunden wird und welche zugleich so geteilt werden können, dass jener *Buchstabe* verschwindet, $= 0$ an. Und dies mache ich bei *den einzelnen Buchstaben*, aber *nicht nur auf eine Weise*, so wie be der vorhergehenden 3. Regel, sondern *auf alle Weisen, auf welche das geschehen kann.* Und wenn die vorgelegte Gleichung aus zwei besagten Gleichungen von solcher Art erzeugt werden konnte, so wird sie auch durch eine dieser fiktiven Gleichungen teilbar sein, in denen die besagten *Buchstaben* weggeschafft worden sind.

Weil ja aber diese Regel ganz genau dasselbe zu tun vorschreibt wie die vorhergehende 3., hebe ich hier nur das hervor, dass jenes, was dort bei den verschiedenen einzelnen Buchstaben nur *auf eine einzige Weise* probiert worden ist, wie es gesagt worden ist, hier auf *alle Weisen* zu versuchen ist; es genügt, diese Sache anhand eines einzigen Beispiels zu erklären.

Es sei deshalb diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 + \frac{1}{2}aaxx & - \frac{1}{4}aabx & - \frac{1}{8}aabb = 0 \\ \quad - \frac{1}{2}b \quad - 1\frac{1}{2}ab & - \frac{1}{4}abb & - \frac{1}{4}ab^3 \\ \qquad\qquad - \frac{1}{4}bb & & \end{array}$$

Beginnend mit dem Buchstaben a, wo er eine Dimension hat, erhalte ich $-ax^3 + 1\frac{1}{2}abxx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 = 0$ oder $-x^3 + 1\frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3 = 0$. Mithilfe dieser Gleichung kann die vorgelegte Gleichung nicht geteilt werden (dies ist in diesem Beispiel freilich auch daher klar, dass der letzte Term $-\frac{1}{4}b^3$ den letzten Term der vorgelegten Gleichung nicht ohne Bruch teilt). Nun gehe ich freilich nicht zu einem anderen Buchstaben über, so wie in der vorhergehenden Regel, sondern werde so lange denselben Buchstaben a betrachten, wie noch andere Größen in der Gleichung existieren, in denen jener mit mehr oder weniger Dimensionen gefunden wird. Und daher weil a hier selbst nur mit zwei Dimensionen gefunden wird, nehme ich gleichermaßen alle Größen, in denen er 2 Dimensionen hat, $= 0$ an; nämlich $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabx - \frac{1}{8}aabb = 0$ oder $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}bb = 0$, welche die vorgelegte Gleichung teilen kann. Wenn dies nicht passiert wäre, wäre ich zu einem anderen Buchstaben übergegangen, weil ja alle Größen, in denen a enthalten ist, einzig und allein durch a oder *aa* geteilt werden können. Deshalb, nachdem bei allen Buchstaben und auf alle Arten ein Versuch unternommen worden ist, wenn in Erfahrung gebracht ist, dass die Division der vorgelegten Gleichung durch keine der gebildeten Gleichungen gelingt, ist es gewiss, dass die vorgelegte Gleichung auch nicht aus zwei anderen solcher Art, wie sie oben definiert worden sind, erzeugt werden kann.

5. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung zu reduzieren, die aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von denen die eine einen Buchstaben *umfasst, welcher in der anderen nicht enthalten ist.*

Der eine Buchstabe sei $= 0$ angenommen; und man untersuche, ob die Gleichung, die daraus resultiert, mit der vorgelegten Gleichung einen Teiler gemeinsam hat. Wenn sie keinen hat, nehme man wiederum einen anderen Buchstaben $= 0$ an und untersuche, ob die daher resultierende Gleichung einen gemeinsamen Teiler hat usw., bis entweder ein gemeinsamer Teiler gefunden wird oder kein anderer Buchstabe übrig ist, welcher nicht $= 0$ angenommen worden ist. Und wenn kein gemeinsamer Teiler gefunden wird, so wird dies ein Anzeichen sein, dass die vorgelegte Gleichung aus der Multiplikation zweier anderer, von denen die eine einen Buchstaben umfasst, welcher in der anderen nicht enthalten ist, nicht erzeugt werden kann.

Eines Beispiels wegen, wenn diese Gleichung betrachtet wird

$$\begin{array}{llll} x^5 + 4abx^3 + 30b^3 & xx + 34ab^3x & + 20ab^4 & = 0 \\ \quad + bb & \quad - 10abb & + 7a^4 & + 10a^4b \\ \quad + \dfrac{a^4}{bb} & \quad - \dfrac{2a^4}{b} & & \end{array}$$

und der Buchstabe $a = 0$ angenommen wird, wird daher $x^5 + bbx^3 + 30bbbxx = 0$ resultieren, welche mit der vorgelegten einen gemeinsamen Teiler hat, nämlich $xx - 3bx + 10bb = 0$. Wenn sich dies anders ereignet hätte, hätte ich einen anderen Buchstaben, natürlich b, $= 0$ gesetzt und wenn die daher resultierende Gleichung auch keinen gemeinsamen Teiler gehabt hätte, so hätte ich gefolgert, dass die vorgelegte Gleichung, weil sie ja nur die zwei verschiedenen Buchstaben a und b hat, nicht aus der Multiplikation zweier anderer

entstehen kann etc.
Dies verhält sich genauso bei Gleichungen, welche irrationale Größen einschließen, sodass es nicht nötig ist, andere Beispiele hinzuzufügen.

Die folgende 6., 7. und 8. Regel erstrecken sich auf alle Gleichungen, die aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden können, in der einen von welchen eine irrationale Grösse enthalten ist, welche in der anderen nicht enthalten ist.

6. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung zu reduzieren, welche aus der Multiplikation zweier anderer gebildet werden kann, von welchen die eine eine irrationale Größe *umfasst, welche in der anderen nicht enthalten ist; und welche* Größe *nicht dieselbe Anzahl an Dimensionen in den verschiedenen Termen hat.* Ich nehme an, etc.

7. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung zu reduzieren, die aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von welchen eine eine gewisse irrationale Größe *umfasst, welche in der anderen nicht enthalten ist; und welche* Größe *in einem bestimmten Term so viele Dimensionen wie in keinem anderen hat.* Ich nehme an, etc.

8. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung zu reduzieren, die aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von welchen eine eine gewisse irrationale Größe *umfasst, welche in der anderen nicht enthalten ist.* Man nehme an, etc.

Weil ja zwischen der 6. und der 3. Regel und zwischen der 7. und 4. und auch zwischen der 8. und 5. kein großer Unterschied besteht, und lediglich für den *Buchstaben* die *irrationale Größe* gesetzt werden muss, sind diese Regeln durch jene bereits erklärt. Wenn du nämlich für irgendeine andere irrationale Größe bloß einen anderen Buchstaben annimmst oder festlegst, werden diese völlig dieselben sein wie jene. Und daher bedürfen diese Worte in der 6. Regel: *eine Größe gleich vieler Dimensionen in den verschiedenen Term existiert nicht* und diese in der 7.: *eine Größe in einem bestimmten Term hat eine solche Anzahl an Dimensionen wie in keinem anderen* keiner Erklärung; und ebenso bedarf es keiner Erklärung, was eine *andere irrationale Größe ist.*

Und anstelle eines Korollars könnte hier angemerkt werden, dass diese 8. Regel auch die Reduktion jeder Gleichung umfasst, welche aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von welchen die eine *rational* ist, das heißt, *in welcher kein Wurzelzeichen enthalten ist*, und die andere irrational.

Weil ja aber diese 5. und 8. Regel im Voraus den Fund eines gemeinsamen Teilers der zwei Gleichungen annehmen, möchte ich die Methode hinzufügen, die ich gebrauche, nämlich

die Art den größten gemeinsamen Teiler von zwei (oder mehreren) Gleichungen oder Größen zu finden.

Es sei nämlich eines Beispiels wegen vorgelegt, den größten gemeinsamen Teiler der zwei folgenden Gleichungen oder Größen zu finden, (ich betrachte nämlich Größen nicht anders als Gleichungen, indem ich jene $= 0$ annehme, weil diese Annahme, um deren gemeinsamen Teiler zu finden, zu keinem Fehler führen kann.)

$$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd = 0 \quad \text{und} \quad d^4c - bbcdd + caabb - caadd = 0.$$

Daher untersuche ich zuerst, ob ein gewisser Buchstabe oder eine gewisse Zahl aufgefunden wird, mit deren Hilfe die einzelnen Terme jeder der beiden Gleichungen geteilt werden können. Wenn dies nämlich gelingt, ist es notwendig als erstes eine Divison solcher Art durchzuführen wie hier durch den Buchstaben c, und die Gleichungen werden zu diesen:

$$d^3 - add + 2aab - 2abd = 0 \quad \text{und} \quad d^4 - bbdd + aabb - aadd = 0.$$

Darauf nehme man nach Belieben einen anderen Buchstaben, welcher in jeder dieser beiden Gleichungen aufgeführt wird, wie d, a oder b. Und indem man selbigen, sei es hier d, als unbekannte Größe ansieht, ordne man jede der beiden Gleichungen nach diesem und man wird haben:

1. Gleichung	2. Gleichung
$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0.$	$\begin{array}{l} d^4 - bbdd + aabb = 0 \\ \quad\;\; - aa \end{array}$

Weiter setze man den Wert von d^3, gefunden durch die 1. Gleichung, überall anstelle von d^3 in der zweiten Gleichung ein: Und man wird finden:

$$
\begin{array}{rl}
d^4 = ad^3 & + 2abdd - 2aabd \\
& \text{oder} \\
& aadd + 2abdd - 2a^3b \\
& \quad - 2aabd + 2abdd \\
\hline
\text{Das heißt} & aabb - 2a^3b \quad + 2abdd - bbdd = -0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{und} \quad dd = \frac{2a^3b - aabb}{2ab - bb} \quad \text{oder} \quad aa; \quad \text{und} \quad d = a \quad \text{oder} \quad d - a = 0$$

Wenn nun der Wert dieses dd anstelle von selbigem in der 1. Gleichung eingesetzt wird, wird man $aad - a^3 - 3abd + 2aab = 0$ haben.
Schließlich setze man den Wert a anstelle von d in dieser letzten Gleichung ein, man wird $a^3 - a^3 - 2aab + 2aab = 0$ erhalten.
Weil sich also in dieser Gleichung alle Terme gegenseitig aufheben, ist dies ein Anzeichen, dass so die Gleichung $d^3 - add - 2abd + 2aab = 0$ wie

$$
\begin{array}{l}
d^4 - bbdd + aabb = 0 \quad \text{teilbar ist durch} \quad d - a = 0, \\
\quad - aa
\end{array}
$$

und $d - a$ der größte gemeinsame Teiler der beiden ist. Und daher, weil die beiden vorgelegten Gleichungen (oder Größen) zuerst durch c teilbar sind, ist es offenkundig, dass der größte gemeinsame Teiler der beiden $d - a$ mal c oder $dc - ac$ sein wird.

Wenn wir aber einen anderen Buchstaben als d als unbekannte Größe betrachten, so wird es in ähnlicher Weise stets möglich sein, mit deren Hilfe Teiler zu finden. Eines Beispiels wegen, wenn a als unbekannte Größe betrachtet wird, so wird man erhalten

1. Gl.	2. Gl.
$\begin{array}{l} aa - \; -da \; + \dfrac{d^3}{2b} = 0 \\ \quad - \dfrac{dd}{2b} \end{array}$	$aa - \dfrac{bbdd + d^4}{bb - dd} = 0$ oder $\quad aa - dd = 0 \quad$ oder $\quad aa = dd$ oder $\quad a - d = 0 \quad$ and $\quad a = d$

Nun substituiere man den Wert dd für aa, gefunden aus der 2. Gleichung, anstelle von aa der ersten Gleichung und man wird für selbige finden

$$\begin{array}{l} dd - da + \dfrac{d^3}{2b} = 0 \\ \quad\; - \dfrac{dd}{2b} \end{array}$$

Man setze erneut in dieser letzten anstelle von a seinen Wert d ein, man wird erhalten:

$$\begin{array}{l} dd - dd \quad + \dfrac{d^3}{2b} = 0 \\ \quad\; - \dfrac{ddd}{2b} \end{array}$$

Daher, weil in dieser sich wiederum alle Terme gegenseitig aufheben, ist dies der Grund, dass jede der beiden Gleichungen wie zuvor etc.
Die Begründung ist dieselbe, welcher Buchstabe auch immer schließlich als unbekannte Größe angenommen wird.
Wenn es sich hingegen ereignet hätte, dass weder durch die Substitution des Wertes von d^3 noch von d^2 und auch nicht von d sich alle Terme gegenseitig aufgehoben hätten, wäre dies ein Anzeichen dafür gewesen, dass jene zwei Gleichungen

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0 \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} d^4 - bbdd + aabb = 0 \\ \quad\; - aa \end{array}$$

keinen gemeinsamen Teiler hatten, und dass von den zwei vorgelegten Gleichungen, welche als erstes durch c geteilt worden waren, kein gemeinsamer Teiler existiert außer c. In nehme nur den Fall aus, wo die Division durch Größen solcher Art geschehen kann, die zugleich $= 0$ werden können, und dafür verantwortlich sein können, dass der Wert des Buchstaben, welcher als unbekannte Größe angesehen wird, durch diese Gleichung nicht gefunden werden kann.

Eines Beispiels wegen, wenn ich in den vorgelegten Gleichungen den Buchstaben b als eine unbekannte Größe angesehen hätte, hätte ich erhalten für die 1. $\qquad\qquad$ für die 2.

$$b = \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa} \quad \text{oder} \quad \frac{dd}{2a} \qquad \frac{b = \dfrac{d^4 - aadd}{dd - aa} \quad \text{oder} \quad dd}{\text{oder} \quad b = d}$$

Dort sehen wir, dass die Werte von b, nämlich $\frac{dd}{2a} = 0$, sich nicht gegenseitig aufheben, und daher wäre zu folgern, dass diese zwei Gleichungen keinen gemeinsamen Teiler haben, weil nämlich Größen von solcher Art nicht aufgefunden wurden, die, während sie $= 0$ gesetzt werden, bewirken, dass der Wert von b nicht aufgefunden werden kann. So wie wenn $d - a = 0$ gesetzt wird, wird der Wert von b durch die 1. Gleichung nicht gefunden werden können: Es wird dann nämlich $d^3 = add$ sein.

Bevor deshalb gefolgert wird, dass kein gemeinsamer Teiler der zwei Gleichungen oder Größen gegeben ist, ist es 1. zu prüfen, ob Größen von solcher Art in der Gleichung gefunden werden, die der Grund sein können, dass der Wert des unbekannten oder des als unbekannt betrachteten Buchstaben durch diese Gleichung nicht gefunden werden kann. 2. ist zu sehen, wenn sie aufgefunden werden, ob sie jede der beiden Gleichungen teilen. So wie in diesem Beispiel, wo $d - a = 0$ gefunden wird, mit deren Hilfe jede der beiden Gleichungen geteilt wird, was, indem man a anstelle von d einsetzt, auf den ersten Blick klar ist. Aber wenn es sich anders ereignet hätte, so hätte ich gefolgert, dass nicht ... nicht gegeben ist, etc.

Ich möchte noch ein Beispiel hinzufügen.
Wir wollen uns vorlegen, dass der größte gemeinsame Teiler dieser zwei Gleichungen oder Größen zu finden ist

1. Gl. $\qquad\qquad$ 2. Gl.

$$12a^4 + 11aaxx + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x = 0 \qquad 12aaxx - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 = 0$$

Aber weil diese nicht durch einen gewissen Buchstaben oder eine gewisse Zahl teilbar sind, betrachte ich einen bestimmten, nach Belieben anzunehmenden, Buchstaben als unbekannte Größe, beispielsweise x, und führe die Operation weiter durch wie folgt:

$$\begin{array}{rrl}
\text{durch die 1. findet man} & x^4 = & 4ax^3 - 11aaxx + 20a^3x - 12a^4 \\
\text{man addiere} & & -\ 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4 \\ \hline
\text{es ist für die 2. Gleichung} & & ax^3 + \quad aaxx - \ \ 4a^3x + 12a^4 = 0 \\ \hline
\text{man dividiere durch } a & & x^3 + \quad axx - \ \ 4a^2x + 12a^3
\end{array}$$

Nun setze man diesen Wert von x^3 an seiner Stelle in der anderen der beiden Gleichungen ein, nämlich in der ersten (obgleich in diesem Beispiel kaum ein Unterschied besteht, kann es dennoch in vielen Fällen ein großer Unterschied sein, dann ist es nämlich nötig, der Kürze wegen, die auszuwählen, durch welche die Operation am leichtesten durchführbar ist; so wie üblich, wenn zwei da sind, sich in den Dimensionen unterscheidend, die, die weniger Dimensionen hat, zu wählen ist), und man wird $xx = ax - 6aa$ erhalten.

Man substituiere nun wiederum den Wert von xx überall an seiner Stelle in einer der vorhergehenden Gleichungen, indem man, der Kürze wegen, die vorhergehende von 3 Dimensionen nimmt, man wird finden:

2. Gl.

$$\begin{array}{rl}
 & \left.\begin{array}{l} +\ aax \\ \qquad\quad -\ 6a^3 \\ -\ 6aax \\ +\ aax -\ 6a^3 \\ +\ 4aax + 12a^3 \end{array}\right\} = 0 \\
x^3 = axx - 6aax \ \text{ oder} & \\
+\ axx = & \\
+\ 4aax + 12a^3 = &
\end{array}$$

In dieser sehen wir alle Terme sich gegenseitig aufheben, was zeigt, dass diese vorgelegten Gleichungen oder Größen durch $xx - ax + 6aa$ teilbar sind; dies ist daher deren größter gemeinsamer Teiler.

Weiter ist es offenkundig, wenn jemand *alle gemeinsamen Teiler von zwei oder meheren Gleichungen oder Größen* finden will, dass nur *alle Teiler von deren größtem gemeinsamen Teiler* zu finden sind.

Darüber hinaus ist es offensichtlich, dass nicht nur in vielen Fällen durch die

1. und 2. Regel (wie es angemerkt worden ist) auf den ersten Blick erkannt werden kann, dass zwei Gleichungen oder Größen keinen bestimmten gemeinsamen Teiler haben können, sondern auch alle Regeln, von der Reduktion von Gleichungen handelnd, dazu dienen können alle gemeinsamen Teiler derselben zu finden.

9. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung, ob literal oder numeral, zu reduzieren, welche durch eine andere, von welcher nur ein einziger Term gegeben ist, geteilt werden kann.

Ich werde dies nur in dem ein oder anderen Beispiel zeigen, weil ja die allgemeine Methode daraus hinreichend erkannt werden wird.

Deshalb sei die Gleichung $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 = 0$ vorgelegt, und es sei gegeben, dass jene durch eine andere von zwei Dimensionen geteilt werden kann, deren letzter Term -2 sei. Nehmen wir also an, jene sei $xx + yx - 2 = 0$ oder $xx = -yx + 2$. Ich setze diesen Wert von xx überall an seiner Stelle ein, und ich erhalte eine andere Gleichung anstelle der vorgelegten, in welcher x nur von einer einzigen Dimension gefunden wird: Nämlich

$$\left(y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5\right) \cdot x - 2y^3 - 8yy - 16y - 16 = 0,$$

wie es sich aus der folgenden Operation sehen lässt.

$$
\begin{array}{rlcrlr}
xx = & -\,yx + 2 & & & & \\
\hline
\text{daher } x^4 = & yyxx - 4yx + 4 & \text{oder} & -\;\; y^3x & + & +\,2yy \\
\hline
x^5 = & -y^3xx + 2xyy & \text{oder} & +\;\; y^4x & - & 2y^3 \\
 & -\,4yxx + 4x & & +\;\; 2yy & & \\
 & & & +\, 4yyx & - & 8y \\
 & & & +\;\; 4x & & \\
-\,4x^4 = & & & +\, 4y^3x & - & 16 \\
 & & & +\, 16yx & - & 8yy \\
+\,4x^3 = & -4yxx + 8x & \text{oder} & +\, 4yyx & - & 8y \\
 & & & +\;\; 8x & & \\
+\,1\tfrac{1}{2}xx = & & & -\,1\tfrac{1}{2}yx + 3 & & \\
-\,7x - 3 = & & & -\;\; 7x & - & 3 \\
\hline
 & & \text{Summe} & +\;\; y^4x & - & 2y^3 \\
 & & & +\;\; 4y^3 & - 8yy & = \;0 \\
 & & & +\, 10yy & - & 16y \\
 & & & +\, 14\tfrac{1}{2}y & - & 16 \\
 & & & +\;\; 5 & &
\end{array}
$$

Darauf betrachte ich irgendeinen Term dieser abgeleiteten Gleichung einzeln als $= 0$, und weil es hier nur zwei Terme gibt, werde ich daher diese zwei Gleichungen haben

$$
\begin{array}{ccc}
\text{I.} & \text{und} & \text{II.} \\
y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\tfrac{1}{2}y + 5 = 0 & \text{oder} & \dfrac{-\,2y^3 - 8yy - 16y - 16 = 0}{y^3 + 4yy + \;\, 8y + \;\, 8 = 0}
\end{array}
$$

Von diesen Gleichungen, wenn gemäß der vorhergehenden Methode der größte gemeinsame Teiler gesucht wird, wird selbiger als $y + 2 = 0$ gefunden werden, sodass die vorgelegte Gleichung selbst, weil $y = 2$ ist, durch $xx - 2x - 2 = 0$ teilbar ist.

Auf die gleiche Weise sei diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + 2aa&xx - 2a^3x + a^4 = 0 \\ - cc& \end{aligned}$$

und es sei gegeben, dass selbige durch eine Gleichung von zwei Dimensionen dividiert werden kann, deren letzter Term $+aa$ sei. Dies trifft aber nur auf die Gleichung $xx + yx + aa = 0$ zu bzw. auf $xx = -yx - aa$. Daher, nachdem dieser Wert anstelle von xx eingesetzt worden ist, wird man anstelle jener vorgelegten Gleichung eine andere erhalten, in welcher x nur von einer Dimension sein wird, nämlich

$$\begin{array}{ll} -y^3 & x - aayy = 0 \\ -2ayy & -2a^3y \\ +ccy & +aacc \end{array}$$

Wenn von dieser nun wiederum ein beliebiger Term einzeln als $= 0$ betrachtet wird, wird man diese zwei Gleichungen haben

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & & \text{II.} \\ -y^3 - 2ayy + ccy = 0, & & -aayy - 2a^3y + aacc = 0 \\ \text{oder} & \text{und} & \text{oder} \\ -yy - 2ay + cc = 0 & & -yy - 2ay + cc = 0. \end{array}$$

Daher weil deren gemeinsames Maß oder gemeinsamer Teiler $-yy + 2ay + cc =$ ist, suche ich daraus den Wert von y; und ich finde $y = -a \pm \sqrt{aa + cc}$, und somit, dass the vorgelegte Gleichung durch $xx - a \pm (\sqrt{aa + cc})x + aa = 0$, teilbar ist.

Gleichermaßen, wenn gegeben ist, dass diese Gleichung

$$\begin{aligned} x^5 + bb&x^3 + 3abbxx + 2ab^4 = 0 \\ + aa& \quad - 2a^3 \end{aligned}$$

durch eine andere von 3 Dimensionen teilbar ist, deren dritter Term $+2aax$ ist, setze ich für selbige $x^3 + yxx + 2aax + z = 0$ oder $x^3 = -yxx - 2aax - z$. Nachdem dieser Wert überall anstelle von x^3 in der vorgelegten Gleichung eingesetzt worden ist, wird man erhalten

$$\begin{array}{llll} -z & xx + yzx & +aaz & = 0 \\ +3aay & +2a^4 & -yyz & \\ -y^3 & -2aayy & -bbzz & \\ -bby & -2aabb & +2ab^4 & \\ -2a^3 & & & \end{array}$$

Weil aber diese Gleichung 3 separierte Terme hat, wird man daher diese 3 Gleichungen haben

1.

$$-z + 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3 = 0,$$

2. 3.

$$yz + 2a^4 - 2aayy - 2aabb = 0, \quad aaz - yyz - bbz + 2ab^4 = 0.$$

Daher durch die 1. nach Elimination von z, welche dann $= 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$ ist, wird man für die 2. finden:

$$\begin{array}{llll} -y^4 + aayy & +3abby & -2aabb & = 0, \\ \quad -bb & -2a^3 & +2a^4 & \end{array}$$

und für die 3.:

$$\begin{array}{lllll} +y^5 - 4aay^3 & +2a^3\ yy & +3a^4\ y & +5a^3bb & = 0 \\ \quad +2bb & -3abb & -4aabb & -2a^5 & \\ & & +b^4 & -ab^4 & \end{array}$$

Von diesen zweien ist der größte gemeinsame Teiler nach der obigen Methode $y = a$; und weil $z = 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$ ist, wird daher z auch

$= +2abb$ sein. Aber die Gleichung, durch welche die vorgelegte geteilt werden kann, war $x^3 + yxx + 2aay + z = 0$ gesetzt worden. Deshalb, wenn in dieser die Werte der unbekannten Größen y und z eingesetzt werden, wird man für selbige $x^3 + axx + 2aax + 2abb = 0$ finden.

Und so für alle anderen vorgelegten Gleichungen, ob rational oder irrational und entweder einen oder keinen Bruch involvierend; und zwar wenn entweder der letzte Term oder irgendein beliebiger anderer Term der Gleichung, durch welche die der vorgelegten geteilt werden können, gegeben war, sei er einer anderen Größe (wie in diesen Beispielen) oder Null gleich, von welcher Art ich freilich kein Beispiel anführe, weil die Operation in keinster Weise verschieden ist. Ich möchte nur das hinzufügen, dass all diese Dinge auch aus dem Vergleich der Terme zweier Gleichungen derselben Form gefunden werden können.

Die 10. und auch die 11. Regel erstrecken sich auf jede Gleichung, ob in ihr rationale Grössen oder Brüche oder gar nichts von beidem gefunden wird, einzig ausgenommen davon sind jene Gleichungen, in denen Wurzelzeichen enthalten sind, welche die unbekannte Grösse einschliessen.

Weil aber diese zwei Regeln eine Methode verlangen, mit welcher alle Wurzelzeichen, welche die unbekannte Größe einschließen, wenn in der vorgelegten Gleichung unter Umständen solche enthalten waren, zuerst beiseitigt werden, die folgenden Regeln hingegen eine Methode erfordern, mit welcher alle Zeichen ohne Unterschied zuerst einmal entfernt werden, möchte ich folgendes vorausschicken:

Die Art alle Wurzelzeichen aus jeder beliebigen Gleichung zu eliminieren.

Es sei, eines Beispiels wegen, die Gleichung $n = e + g + h + k + m +$ etc. vorgelegt, in welcher 1. jeder beliebige Buchstabe eine Größe bezeichne, die mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ behaftet ist. Man quadriere nun jede der beiden Seiten und das Wurzelzeichen der Größe n wird verschwinden. Weil ja aber die übrigen Buchstaben e, g, h, k, m etc. entweder eine oder zwei Dimensionen haben werden und das Wurzelzeichen nur in denen verschwindet, in welchen es zwei hat, so ist es offenkundig, dass eine Gleichung erhalten werden kann, in welcher e den anderen Termen gleich wird, in denen e nicht enthalten ist. Wenn diese Gleichung wiederum in gleicher Weise mit sich selbst multipliziert wird, wird gleichermaßen das Wurzelzeichen von e verschwinden, und weil ja dann in dieser letzten Gleichung die übrigen Buchstaben entwerder 1 oder 2 oder 3 oder 4 Dimensionen haben werden, und nur die, die aus einer geraden Anzahl an Dimensionen bestehen, kein Wurzelzeichen haben und allein die, die aus einer ungeraden Anzahl bestehen, bei dieser Methode als aus einer Dimension bestehend anzusehen sind, weil zwei Dimensionen immer frei vom Wurzelzeichen sind, so ist es offenkundig, dass wiederum eine Gleichung gefunden werden kann, in welcher g gleich einigen Termen ist, in denen g nicht enthalten ist. Nachdem diese Gleichung erneut quadriert wurde, wird ebenso das Wurzelzeichen von g wegzuschaffen sein. Und so ist es leicht einzusehen, dass mit jeder Quadrierung ein Wurzelzeichen beseitigt wird.

Zum besseren Verständnis sei die folgende Operation hinzugefügt, während $n = e + g + h + k$ ist, wo durch Quadrieren jeder der beiden Seiten der Gleichung die Gleichung $nn = ee + gg + hh + kk + 2eg + 2eh + 2ek + 2gh + 2gk + 2hk$ hervorgeht. Aber der Kürze wegen schreibe man für $\frac{nn-ee-gg-hh-kk}{2}$ einfach pp; weil diese Größen frei vom Wurzelzeichen sind und $pp = eg + eh + ek + gh + gk + hk$ oder auch $e = \frac{pp-gh-gk-hk}{g+h+k}$ gilt. Daher, indem man jede der beiden erneut quadriert, findet man:

$$ee = \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk}{gg + hh + hh + 2gh + 2gk + 2hk}$$

oder auch

$$\begin{aligned} p^4 + gghh + ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk \\ +(gg - hh - kk - 2gh - 2gk - 2hk) \cdot ee = 0. \end{aligned}$$

Man nehme, wie zuvor der Kürze wegen an:

$$\begin{aligned} p^4 + gghh + ggkk + hhkk - (gg - hh - kk) \cdot ee &= q^4 \\ + 2kk - 2pp - 2ee &= rr \\ + 2hh - 2pp - 2ee &= ss \\ + 2gg - 2pp - 2ee &= tt \end{aligned}$$

und es wird gelten:

$$\begin{array}{l}
q^4 + rrgh + ssgk + tthk = 0 \\
\hline
\dfrac{q^4 + tthk}{rrh + ss} = -g \\
\hline
\dfrac{q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk}{r^4hh + s^4kk + 2rrsshk} = gg \\
\hline
(q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk - r^4hh - s^4kk - 2rrsshh) \cdot gg = 0
\end{array}$$

Man nehme nun wiederum der Kürze wegen an

$$q^8 + t^4hhkk - r^4hhgg - s^4kkgg = v^8$$
$$\text{und} \quad 2q^4tt - 2rrssgg = w^6 :$$

und es wird gelten:

$$\begin{array}{l}
v^8 + w^6hk = 0 \\
\hline
v^8 = -w^6hk \\
\hline
\end{array}$$

und man wird $v^{16} = w^{12}hhkk$ finden. Diese Gleichung ist frei von jeglichen Wurzelzeichen.

Desweiteren setze man einen Buchstaben der obigen Gleichung $n = e + g + h +$ etc. fest die Größe die mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{C}$[3] behaftete Größe zu bezeichnen. Wenn in dieser Gleichung also anstelle der Quadration jede der beiden Seiten kubiert wird, wird das Wurzelzeichen von n verschwinden und jeder der übrigen Buchstaben e, g, h etc. wird zu 1, 2 oder 3 Dimensionen ansteigen. Aber nur wenn sie aber drei Dimensionen haben, werden sie frei vom Wurzelzeichen sein, sodass in dieser Weise eine Gleichung erhalten werden kann, in welcher e nur 1 oder 2 Dimensionen haben kann. Daher, indem man all diese Terme mit e multipliziert, wird man eine Gleichung erhalten, in welcher e nur 1, 2 oder 3 Dimensionen haben kann. Es hat aber nur 3 Dimensionen, wenn auch das Wurzelzeichen, wie es gesagt wurde, verschwindet; und daher wird e in dieser Gleichung sogar nur 1 und 2 Dimensionen haben können. Daher, wenn mithilfe dieser Gleichung der Wert von ee ermittelt wird, und dieser anstelle von ee der vorhergehenden eingesetzt

[3] Hudde meint hier $\sqrt[3]{}$, C steht für "cubicus". Wir werden im weiteren Verlauf wie bisher das moderne Zeichen $\sqrt[3]{}$ schreiben.

wird, wird man eine Gleichung erhalten, in welcher e nur eine Dimension haben wird, und daher wird e durch einige Terme, in denen es selbst nicht enthalten ist, ausgedrückt gefunden werden können. Diese Gleichung, wenn sie darauf kubiert wird, wird eine andere geben, in welcher gleichermaßen das Wurzelzeichen von e völlig verschwinden wird. Oder man kann wiederum mit e multiplizieren und erneut den Wert von ee ermitteln, sodass man wiederum, wie zuvor, wenn er anstelle von ee eingesetzt wird, den Wert von e auf andere Art ausgedrückt findet; und daher werden diese beiden Werte einander gleich gesetzt eine Gleichung geben, in welcher die Kubikwurzel von e nicht aufgefunden wird. Und so können alle Wurzelzeichen aus der Gleichung eliminiert werden; dies wird am leichtesten erkannt, wenn wir bedenken, dass, eines Beispiels wegen, g, gg, g^4, g^5, g^7, g^8, g^{10}, g^{11}, g^{13}, g^{14} etc. für g, gg zu halten sind, weil g^3 das Wurzelzeichen aufhebt. Damit das Gesagte klarer wird, schien es ratsam, die folgende Operation hinzuzufügen.

Eines Beispiels wegen sei

$$\begin{array}{c} n = e + g \\ \hline n^3 = e^3 + 3eeg + 3egg + g^3 \\ \hline n^3 - e^3 - g^3 = 3eeg + 3egg \end{array}$$

Nehmen wir also der Kürze wegen an, es sei $n^3 - e^3 - g^3 = f^3$, weil ja selbige von der Asymmetrie unbetroffen sind, und es wird gelten

$$\begin{array}{rc} & f^3 = 3eeg + 3egg \\ \hline & f^3 = 3e^3g + 3eegg \\ \hline \text{und} & \dfrac{f^3e - 3e^3g}{g} = 3eeg. \end{array}$$

Nachdem der Wert von $3eeg$ gefunden worden ist und selbiger an entsprechender Stelle in der vorhergehenden Gleichung eingesetzt worden ist, wird man haben:

$$f^3 = \frac{f^3e - 3e^3g}{g} + 3egg$$

$$f^3g = f^3e - 3e^3g + 3eg^3$$

$$f^3g + 3e^3g = f^3e + 3eg^3$$

$$\frac{f^3 + g + 3e^3g}{f^3 + 3g^3} = e.$$

Schließlich setze man, der Kürze wegen, $f^3 + 3e^3 = p^3$ und $f^3 + 3g^3 = q^3$, weil sich die jeweiligen Wurzelzeichen aufheben, und es wird gelten:

$$\frac{p^3g}{q^3} = e$$

$$\text{und} \quad \frac{p^9g^3}{q^9} = e^3.$$

Diese Gleichung weist keine Asymmetrie auf. Oder auf diese Weise: Man multipliziere $\frac{p^3g}{q^3} = e$ mit e, es wird $\frac{p^3ge}{q^3} = ee$ sein; und weil ja $f^3 = 3gee + 3gge$ oder $\frac{f^3 - 3gge}{3g} = ee$ gefunden worden ist, wird gelten:

$$\frac{p^3ge}{q^3} = \frac{f^3 - 3gge}{3g}$$

$$\text{und} \quad 3ggp^3e = q^3f^3 - 3q^3gge$$

$$\text{also} \quad e = \frac{q^3f^3}{3ggp^3 + 3q^3gg} = \frac{p^3g}{q^3}$$

$$\text{und} \quad q^6f^3 = 3g^3p^6 + 3g^3p^3q^3.$$

Diese Gleichung ist ebenso frei von jeglichem Wurzelzeichen.

In gleicher Weise können auch jegliche höheren Wurzeln eliminiert werden, gleichgültig, ob sie von gleicher oder verschiedener Dimension sind. Aber es ist zu bemerken, dass diese Zeichen, obgleich sie bekannten oder unbekannten Größen vorangestellt sind, auf dieselbe Weise freilich immer beseitigt werden können, dies jedoch meist sehr langwierig ist, wannimmer sich die Wurzelzeichen auf bekannte Größen beziehen; so wie es sich aus der *Geome-*

tria[4] entnehmen lässt, wo gelehrt wird, dass Wurzelzeichen eliminiert werden können, indem man die Wurzel Gleichung mit einer anderen bestimmten Größe, welche viele Dimensionen besitzt, multipliziert, wodurch die vorgelegte Gleichung selbst in eine andere Gleichung transformiert wird.

Es sind außerdem noch andere Kunstgriffe gegeben, für welche das oben erwähnte Beispiel als Muster dienen wird: Denn diese Gleichung $f^3 = 3gee + 3gge$ auf der einen Seite durch n und auf der anderen durch $e + g$ (was gleich n ist) dividiert gibt $\frac{f^3}{n} = 3ge$, nach Kubieren welcher Gleichung man $\frac{f^9}{n^3} = 27g^3e^3$ haben wird, eine Gleichung, in welcher man kein Wurzelzeichen findet: Aber weil ich ja angekündigt habe, hier nur die allgemeine Methode anzugeben, mit welcher immer alle Wurzelzeichen eliminiert werden können und nicht die Kunstgriffe, mit welchen sich in vielen Fällen leichter zum Ziel gelangen lässt, zu zeigen, möchte ich hier zum Ende kommen und zu den Regeln für Reduktionen zurückkehren.

10. Regel

welche die Art lehrt, jede Gleichung zu reduzieren, ob literal eine numeral, deren unbekannte Größe, (oder ein anderer Buchstabe, welcher als Unbekannte betrachtet werden kann) zwei oder mehr gleiche Werte hat.

Zuerst, wenn die vorgelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, multipliziere ich sie mit einer nach Belieben angenommenen arithmetischen Progression: Natürlich den 1. Term der Gleichung mit dem 1. Term der Progression, den 2. Term der Gleichung mit dem 2. Term der Progression und so weiter; und dann wird das Produkt, welches daraus entsteht, $= 0$ sein. Desweiteren, weil wir so zwei Gleichungen haben, suche ich, mithilfe der weiter oben erklärten Methode, deren größten gemeinsamen Teiler; und durch selbigen dividiere ich die vorgelegte Gleichung sooft wie möglich.

Eines Beispiels wegen sei diese Gleichung vorgelegt $x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0$, in welcher zwei gleiche Wurzeln enthalten sind. Also multipliziere ich die Gleichung mit einer beliebigen arithmetischen Progression, das heißt, einer solchen, deren Inkrement oder Dekrement entweder 1 oder 2 oder 3 oder irgendeine andere Zahl ist und deren erster Term entweder 0 oder größer oder kleiner als 0 ist, sodass mithilfe einer solchen Progression ein Term aus der Gleichung eliminiert werden kann, indem man bloß 0 unter ihn setzt.

[4]Damit ist das Werk von Descartes gemeint.

Wie wenn ich eines Beispiels wegen den letzten Term der Gleichung eliminieren will

$$\begin{array}{rl}
\text{kann die Multiplikation von} & x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0 \\
\text{mit dieser Progression geschehen} & 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0 \\
\hline
\text{und es wird gelten} & 3x^3 - 8xx + 5x \quad = 0
\end{array}$$

Aber der größte gemeinsame Teiler dieser und der vorgelegten Gleichung ist $x - 1 = 0$, durch welchen die vorgelegte zweimal geteilt werden kann, sodass die Wurzeln der Gleichung 1, 1 und 2 sind.

Wenn man den 1. Term der Gleichung wegschaffen will,

$$\begin{array}{rl}
\text{kann die Multiplikation von} & x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0 \\
\text{mit dieser Progression geschehen} & 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \\
\hline
\text{und es ist} & \quad - 4xx + 10x - 6 = 0
\end{array}$$

Und der größte gemeinsame Teiler dieser und der vorgelegten Gleichung ist, wie zuvor, $x - 1 = 0$.
Gleichermaßen, wenn es beliebt den zweiten Term zu eliminieren, kann die Multiplikation auf diese Weise durchgeführt werden:

$$\begin{array}{rl}
 & x^3 - 4xx + 5x - 2 = 0 \\
 & +1. \quad 0. \quad -1. \quad -2. \\
\hline
\text{und es wird folgende Gleichung hervorgehen} & x^3 \quad - 5x + 4 = 0
\end{array}$$

Der größte gemeinsame Teiler von dieser und der vorgelegten Gleichung ist ebenfalls $x - 1 = 0$.

Dabei ist zu bemerken, dass es nicht notwendig ist, den Exzess der Progression als 1 zu wählen, obwohl es für gewöhnlich die beste Wahl ist.
Außerdem ist es zu bemerken, dass von all diesen verschiedenen Operationen, obwohl sie alle denselben größten gemeinsamen Teiler darbieten, dennoch oft die einen den anderen vorzuziehen sind, weil ja durch die Elimination eines Terms oftmals um vieles leichter zum Ziel gelangt wird als durch die Elimination eines anderen. Und wir sind nicht angehalten, diesen Teiler unmittelbar aus der vorgelegten Gleichung und einer anderen generierten Progression dieser Art zu ermitteln, weil sich zwei aus diesen auswählen

lassen, mit deren Hilfe der Teiler sich finden lässt. Wie wenn man eines Beispiels wegen $3xx - 8x + 5 = 0$ und $-4xx + 10x - 6 = 0$ oder $3xx - 8x + 5 = 0$ und $x^3 - 5x + 4 = 0$ oder $-4xx + 10x - 6 = 0$ und $x^3 - 5x + 4 = 0$ nimmt. Und oftmals ist es auch weitaus kürzer, zwei Produkte von dieser Art auszuwählen, und anschließend deren größten gemeinsamen Teiler zu finden, als ein bestimmtes Produkt und die vorgelegte Gleichung zu verwenden. All dies wird die Anwendung dieser Regel im Überfluss lehren.

Aber so wie in diesem Beispiel gehe ich auch in jedem anderen vorgelegten Beispiel vor, weil es gleichgültig ist, ob die Gleichung eine numerale oder eine literale war und ob sie Brüche oder surdische Größen involviert, solange die unbekannte Größe sich nicht unter einem Wurzelzeichen befindet, oder nicht, sodass es überflüssig ist hier mehr Beispiele zu diesem Thema hinzuzufügen. Daher gehe ich nun zum anderen Teil der Regel über.

2. Wenn in der vorgelegten Gleichung 3 gleiche Wurzeln enthalten waren, multipliziere ich jene Gleichung mit einer arithmetischen Progression wie zuvor; und das Produkt wird $= 0$ sein: Dieses Produkt multipliziere ich erneut mit einer arithmetischen Progression; und auch dieses zweite Produkt wird $= 0$ sein. Wenn die vorgelegte Gleichung 4 gleiche Wurzeln hat, multipliziere ich dreimal; wenn 5, dann viermal; und so wird man immer so viele Gleichungen erhalten wie gleiche Wurzeln in der vorgelegten Gleichung enthalten sind.

Eines Beispiels wegen sei diese Gleichung gegeben: $x^4 - 6xx + 8x - 3 = 0$, welche 3 gleiche Wurzeln hat.

Zuerst multipliziere ich sie mit	$0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4$
und es wird	$-12xx + 24x - 12 = 0.$
Dieses Produkt multipliziere ich erneut mit	$0. \quad 1. \quad 2$
und es geht hervor	$24x - 24 = 0$
und der gemeinsame Teiler ist	$x - 1 = 0.$

Sodass die vorlgelegte Gleichung 4 Wurzeln hat, nämlich 1, 1, 1 und -3. Und so ist bei allen anderen Gleichungen vorzugehen.

Aber was den Nutzen dieser Methode betrifft: Dieser ist für Finden von Tangenten, bei der Bestimmung von Maxima und Minima und jeglichen Extrema so groß, dass, wenn sie keinen anderen Anwendungsbereich hätte, er dennoch als immens bezeichnet werden müsste. Und nach der Reduktion solcher Probleme zu einer Gleichung, in welcher noch eine Bedingung zur Bestimmung verlangt wird, dass die unbekannte Größe (oder ein anderer bestimmter Buchstabe, welcher als Unbekannte betrachtet wird) bestimmt wird zwei gleiche Wurzeln zu haben, wird das Gesuchte mithilfe dieser Methode äußert leicht gefunden werden können. Denn es ist lediglich nötig, die Gleichung in der erläuterten Art und Weise mit einer arithmetischen Progression zu multiplizieren, weil diese zwei Gleichungen dann alle Bedingungen des Problems erfassen werden, sodass sie einzig noch gelöst werden müssen. Und es ist zu bemerken, dass dies oftmals mithilfe dieses Produkts der Gleichungen allein, zwar nicht ohne aber mit geringem Aufwand geleistet werden kann; das tritt klar in all jenen Beispielen zutage, welche über das Finden von Tangenten auf den Seiten 40, 41 und 42 von Descartes in seiner *Geometria* aufgeführt sind, in welchen r und s die Unbekannten sind und y zwar bekannt ist, aber wie eine Unbekannte betrachtet wird: Denn alle Bedingungen jener Probleme werden erfasst werden, wenn jene Gleichungen so bestimmt werden, dass die y genannte Größe zwei gleiche Wurzeln hat.

Das erste der erwähnten Beispiele ist $yy + \frac{qr-2qv}{q-r}y + \frac{qvv-qss}{q-r} = 0$.

$$\begin{array}{rl}
\text{Gemäß meiner Methode multipliziere ich mit} & 2. \qquad 1. \qquad 0 \\ \hline
\text{es ist} & 2yy + \dfrac{qr-2qv}{q-r}y = 0 \\ \hline
\text{oder} & 2qy - 2ry + qr = 2qv \\ \hline
\text{und} & y - \dfrac{ry}{q} + \dfrac{1}{2}r = v
\end{array}$$

Das zweite Beispiel ist

$$
\begin{array}{rllllllll}
 & y^6 & -2by^5 & -2cdy^4 & +4bcdy^3 & -2bbcdyy & -2bccddy & +bbccdd & =0 \\
 & & & +bb & -2ddv & +ccdd & & & \\
 & & & +dd & & -ddss & & & \\
 & & & & & +ddvv & & & \\
\text{Ich mult. mit} & +4, & +3, & +2, & +1, & 0 & -1, & -2 & \\
\hline
\text{Das Produkt ist} & 4y^6 & -6by^5 & -4cdy^4 & +4bcdy^3 & & +2bccddy & -2bbccdd & =0 \\
 & & & +2bb & -2ddv & & & & \\
 & & & +2dd & & & & &
\end{array}
$$

Indem man nun durch $2ddy^3$ teilt und v auf die andere Seite bringt, so wird man erhalten:

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{2y^3}{dd} - \dfrac{3byy}{dd} - \dfrac{2cy}{d} + \dfrac{2bc}{d} + \dfrac{bcc}{yy} - \dfrac{bbcc}{y^3} = v. \\
\qquad\qquad\quad + \dfrac{bby}{dd} \\
\qquad\qquad\quad + y
\end{array}
$$

Aber das 3. Beispiel ist von derselben Natur wie das 1.
Dort tritt es klar zutage, dass in all diesen Beispielen das Gesuchte allein aus dem Produkt auf den ersten Blick gefunden wird, denn y ist bekannt, und v, was die Unbekannte war und die einzig gesuchte Größe ist, war auch schnell bekannt.

Aber es passiert in der Tat sogar oft, dass das Gesuchte nicht allein aus der Produktgleichung gefunden werden kann; so wie es geschieht, wenn wir den Wert der unbekannten Größe s finden wollen. Denn dann ist der Wert von v in der ersten Gleichung an entspechender Stelle einzusetzen, oder besser in einer anderen Gleichung, die mit einer anderen Progression multipliziert wurde und mit deren Hilfe aus jener ersten Gleichung ein bestimmter Term nach Belieben (ausgenommen dem, welcher in der 1. Progression weggeschafft worden ist) eliminiert werden kann.
Eines Beispiels wegen, im 1. Beispiel war mit 2, 1, 0 multipliziert worden und es war $v = y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$ gefunden worden; multilpliziert man nun

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & yy & + \dfrac{qr-2qv}{q-r}y + & \dfrac{qvv-qss}{q-r} & = & 0 \\
\text{mit} & +1, & 0, & -1: & & \\
\hline
\text{erhält man} & yy & & \dfrac{-qvv+qss}{q-r} & = & 0 \\
\text{mult. mit } q-r & & & & & \\
\hline
 & qrr-ryy & - & qvv+qss & = & 0 \\
\hline
\text{man teile durch } q & & & ss & = & -yy + \dfrac{ryy}{q} + vv \\
\hline
\text{es ist} & & & s & = & \sqrt{-yy+\dfrac{ryy}{q}+vv}
\end{array}
$$

Daher, wenn in dieser Gleichung anstelle von vv sein Wert eingesetzt wird, wird daher auch der Wert von s bekannt werden.
In der gleichen Weise, indem man im 2. Beispiel mit dieser Progression multipliziert 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, kann der Wert der Größe s gefunden werden. Wenn dort gleichermaßen anstelle von vv sein Wert eingesetzt wird, wird daher s bekannt werden.
Wenn es sich daher zuträgt, dass die Gleichung, mithilfe welcher v gesucht wird, eine solche ist, dass der Wert von v einzig durch dieselbe Gleichung ohne Einschließung von s nicht erhalten werden kann, so kann dieser Wert von s und daher auch v aus der Produktgleichung nicht gefunden werden; es kann dennoch immer, wieviele Dimensionen auch immer eine beliebige unbekannte Größe hat, schließlich eine Gleichung gefunden werden (indem man nicht anderes vorgeht, als wenn deren größter gemeinsamer Teiler, wie es oben gezeigt worden ist, gesucht wird), in welcher bloß eine unbekannte Größe enthalten ist, deren Wurzeln darauf folgend zu finden sind.
Eines Beispiels wegen, wenn man diese Gleichung hat

$$
\begin{array}{l}
y^4 - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \quad = 0. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 9aazz
\end{array}
$$

in welcher y und z die Unbekannten sind und y zu zwei gleichen Wurzeln bestimmt werden muss, führe ich die Operation wie folgt durch:

$$\begin{array}{rllllll}
 & y^4 & -\,6zzyy & -\,12z^3y & +\,9z^4 & & =0. \\
 & & & & -\,9aazz & & \\
\text{mult. mit} & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \\
\hline
\text{es wird} & & -\,12zzyy & -\,36z^3y & +\,36z^4 & & =0. \\
 & & & & -\,36aazz & & \\
\hline
\text{man teile durch } 12zz & & -\,yy & -\,3zy & +\,3zz & & =0. \\
 & & & & -\,3aa & & \\
\hline
 & & yy = & -\,3zy & +\,3zz & & =0. \\
 & & & & -\,3aa & &
\end{array}$$

Gleichermaßen multipliziere man die vorgelegte Gleichung

$$\begin{array}{rllllll}
 & y^4 & -\,6zzyy & -\,12z^3y & +\,9z^4 & & =0. \\
 & & & & -\,9aazz & & \\
\text{mit} & 4, & 3, & 2, & 1, & 0 & \\
\hline
\text{es wird} & 4y^4 & -\,12zzyy & -\,12z^3y & & & =0 \\
\hline
\text{man teile durch } 4y & y^3 & -\,3zzy & -\,3z^3 & & & =0
\end{array}$$

Indem man nun den Wert von yy, den wir oben gefunden haben, an entsprechender Stelle einsetzt, wird man haben:

$$\begin{array}{rlcl}
y^3 = & -\,3zyy + 3zzy & \text{oder} & +\,9zzy - 9z^3 \\
 & -\,3aay & & +\,3zzy + 9aaz \\
 & & & -\,3aay \\
 & -\,3zzy - 3z^3 & = \cdots & -\,3zzy - 3z^3 \\
\hline
 & & \text{Summe} & +\,9zzy - 3z^3 \quad = 0 \\
 & & & -\,3aay + 9aaz \\
\hline
 & & & y \quad = \dfrac{4z^3 - 3aaz}{3zz - aa}.
\end{array}$$

Daher, indem man wiederum diesen Wert überall anstelle von y in dieser Gleichung einsetzt

$$yy = \quad - 3zy + 3zz,$$
$$\qquad\qquad\qquad - 3aa$$

wird sich daraus eine andere Gleichung ergeben, in welcher nur die Unbekannte z auftritt, und diese kann mithile derselben gefunden werden.
Schließlich ist, was ich hier über zwei gleiche Wurzeln gesagt habe, in gleicher Weise auch für 3 oder mehr gleiche Wurzeln zu verstehen. Wenn man nämlich eine Gleichung hat, welche alle Bedingungen des Problems einschließt, einzig diese ausgenommen, dass die unbekannte Größe, oder welche als unbekannt betrachtet wird, zu 3 oder mehr gleichen Wurzeln zu bestimmen ist, so ist es zuerst nötig, die Gleichung mit einer arithmetischen Progression zu multiplizieren und dieses Produkt wiederum in gleicher Weise (mit einer arithmetischen Progression) zu multiplizieren und so weiter, bis man so viele Gleichungen hat wie gleiche Wurzeln, so wie es oben gesagt und erklärt worden ist. Nachdem dies abgehandelt worden ist, so sind die Gleichungen bloß noch in derselben Art und Weise aufzulösen wie es im obigen Beispiel gezeigt worden ist, bis man endlich eine Gleichung erhält, in welcher man nur eine unbekannte Größe auffindet. Und schlussendlich ist zu bemerken, dass unendlich viele Probleme, die von vielen als überaus schwierig bezeichnet werden, sehr leicht zu einer solchen Gleichung, in welcher nur eine Bedingung von dieser Art zu erfüllen ist, reduziert werden und darauf mit dieser Methode gelöst werden können.

11. Regel

welche die Art lehrt, alle Gleichungen ob literal oder numeral, zu reduzieren, welche aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden können, in der einen von welchen ein oder mehrere Terme fehlen.

Der Kürze wegen werde ich die bekannte Größe des 2. Terms mit den Vozeichen $+$ und $-$ kurz p nennen; die des 3. Terms q, des 4. r, des 5. s und so weiter; und $-p$, $-q$, $-s$ etc. werden dieselben Größen bezeichnen, aber mit umgekehrten Vorzeichen.
Eines Beispiels wegen wird in dieser Gleichung

$$x^4 - 2ax^3 - 4bbxx + 6abbx - 4a^4 = 0,$$
$$+ 3b \qquad\qquad + 4aab$$

gelten: $-2a + 3b = p$; $-4bb = q$; $+6abb + 2aab = r$; $-4a^4 = s$; und $+2a - 3b = -p$; $+4bb = -q$ etc.

1. Teil

Wenn eine Gleichung, die 6 oder weniger Dimensionen hat, aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von denen die andere von einer Dimension ist, die andere hingegen einen oder mehrere Terme nicht besitzt, so wird ihre Form eine von den folgenden sein und wird entweder durch eine einzige ihr beigefügte Gleichung oder durch irgendeine andere derer geteilt werden können.

Durch *eine einzige*, wo diese Gleichungen oder Teiler mit den Zeichen & verknüpft sind; durch *irgendeine* hingegen, wo sie mit dem Wort *oder* verbunden sind.

$$x^3, \quad pxx \quad qx, \quad r = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, \qquad \textit{oder} \quad x + \frac{r}{q} = 0.$$

$$\begin{array}{llllll}
x^4, & px^3, & qxx & rx, & s = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \textit{oder} \quad x + \frac{s}{r} = 0. \\
x^4, & px^3, & * & rx, & s = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \& \quad x + \frac{s}{r} = 0. \\
x^4, & px^3, & qxx, & * & s = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \& \quad x \pm \sqrt{-\frac{s}{q}} = 0. \\
x^4, & * & qxx, & rx, & s = 0 \quad \text{durch} \quad x + \frac{s}{r} = 0, & \& \quad x \pm \sqrt{-q} = 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
x^5, & px^4, & qx^3, & *, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \textit{oder} \quad x + \frac{t}{s} = 0. \\
 & & & & & & \textit{oder} \quad x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} = 0. \\
x^5, & px^4, & qx^3 & *, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \textit{oder} \quad x + \frac{t}{s} = 0. \\
x^5, & px^4, & *, & rxx, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \textit{oder} \quad x + \frac{t}{s} = 0. \\
x^5, & px^4, & qx^3, & rxx, & *, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \textit{oder} \quad x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} = 0. \\
x^5 & *, & qx^3, & rxx, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + \frac{t}{s} = 0, & \textit{oder} \quad x \pm \sqrt{-q} = 0. \\
x^5, & px^4, & *, & *, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \& \quad x + \frac{t}{s} = 0. \\
x^5, & px^4, & *, & rxx, & *, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \& \quad x \pm \sqrt{-\frac{s}{r}} = 0. \\
x^5, & *, & qx^3, & *, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + \frac{t}{s} = 0, & \& \quad x \pm \sqrt{-q} = 0. \\
x^5, & px^4, & qx^3, & *, & *, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + p = 0, & \& \quad x + \sqrt[3]{-\frac{t}{q}} = 0. \\
x^5, & *, & *, & rxx, & sx, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x + \frac{t}{s} = 0, & \& \quad x + \sqrt[3]{r} = 0. \\
x^5, & *, & qx^3, & rxx, & *, & t = 0 \quad \text{durch} \quad x \pm \sqrt{-q} = 0, & \& \quad x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} = 0.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
x^6, & px^5, & qx^4, & rx^3, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \textit{oder} \quad x+\dfrac{v}{s}=0. \\
 & & & & & & & & & \textit{oder} \quad x+\dfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}pp-q}=0, \\
 & & & & & & & & & \textit{oder} \quad x+\dfrac{t}{2s}\pm\sqrt{\dfrac{tt}{4ss}-\dfrac{v}{s}}=0. \\
x^6, & px^5, & qx^4, & *, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \textit{oder} \quad x+\dfrac{v}{t}=0. \\
 & & & & & & & & & \textit{oder} \quad x+\dfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}pp-q}=0. \\
x^6, & px^5, & qx^4, & rx^3, & sxx, & *, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \textit{oder} \quad x+\dfrac{v}{s}=0. \\
 & & & & & & & & & \textit{oder} \quad x+\dfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}pp-q}=0, \\
x^6, & px^5, & qx^4, & *, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \textit{oder} \quad x+\dfrac{v}{t}=0. \\
x^6, & px^5, & qx^4, & *, & sxx, & *, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \textit{oder} \quad x+\sqrt{-\dfrac{v}{s}}=0. \\
x^6, & px^5, & qx^4, & rx^3, & *, & *, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \textit{oder} \quad \text{durch diese beiden} \\
 & & & & & & & & & \qquad x+\sqrt[3]{\dfrac{v}{r}}=0, \\
 & & & & & & & & & \qquad x+\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}pp-q}=0. \\
x^6, & *, & qx^4, & rx^3, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+\dfrac{v}{s}=0, & \textit{oder} \quad x\pm\sqrt{-q}=0. \\
 & & & & & & & & & \textit{oder} \quad x+\dfrac{t}{2s}\pm\sqrt{\dfrac{tt}{4ss}-\dfrac{v}{s}}=0. \\
x^6, & *, & qx^4, & rx^3, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+\dfrac{v}{t}=0, & \textit{oder} \quad x\pm\sqrt{-q}=0. \\
x^6, & *, & qx^4, & rx^3, & sxx, & *, & v=0 & \text{durch} & x\pm\sqrt{-q}=0, & \textit{oder} \quad x\pm\sqrt{-\dfrac{v}{s}}=0.
\end{array}
$$

$$x^6,\quad *,\quad *,\quad rx^3,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+\frac{v}{s}=0, \qquad \textit{oder} \quad x+\sqrt[3]{r}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad *,\quad rx^3,\quad sxx,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+p=0, \qquad \textit{oder} \quad x\pm\sqrt{-\frac{v}{s}}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad *,\quad rx^3,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+p=0, \qquad \textit{oder} \quad x+\frac{v}{s}=0.$$

$$\textit{oder} \quad x+\frac{t}{2s}\pm\sqrt{\frac{tt}{4ss}-\frac{v}{s}}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad qx^4,\quad *,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+\frac{v}{t}=0, \qquad \textit{oder} \quad x\pm\sqrt{-q}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad *,\quad *,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+p=0, \qquad \textit{oder} \quad x+\frac{v}{t}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad *,\quad rx^3,\quad *,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+p=0, \qquad \textit{oder} \quad x+\frac{v}{t}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad qx^4,\quad *,\quad *,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+p=0, \qquad \& \quad x-\frac{v}{p^3q}=0,$$

$$\& \quad x\pm\sqrt{-\frac{v}{ppq}}=0,$$

$$\& \quad x\pm\sqrt{\sqrt{-\frac{v}{q}}}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad qx^4,\quad rx^3,\quad *,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x\pm\sqrt{-q}=0, \qquad \& \quad x-\frac{v}{qr}=0,$$

$$\& \quad x+\sqrt[3]{\frac{v}{r}}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad *,\quad rx^3,\quad sxx,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x-\frac{rs}{v}=0, \qquad \& \quad x\pm\sqrt{-\frac{v}{s}}=0,$$

$$\& \quad x+\sqrt[3]{r}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad *,\quad *,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x+\frac{v}{s}=0, \qquad \& \quad x-\frac{st^3}{v^3}=0,$$

$$\& \quad x\pm\frac{t}{v}\sqrt{-s}=0,$$

$$\& \quad x-\sqrt[3]{\frac{st}{v}}=0,$$

$$\& \quad x\pm\sqrt{\sqrt{-s}}=0$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
x^6, & px^5, & *, & rx^3, & *, & *, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \& \quad x+\sqrt[3]{\dfrac{v}{r}}=0, \\
 & & & & & & & & & \& \quad x+\dfrac{v}{ppr}=0. \\
x^6, & *, & qx^4, & *, & sxx, & *, & v=0 & \text{durch} & x\pm\sqrt{-q}, & \& \quad x\pm\sqrt{-\dfrac{v}{s}}=0. \\
x^6, & *, & *, & rx^3, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+\dfrac{v}{t}=0, & \& \quad x+\sqrt[3]{r}=0. \\
x^6, & px^5, & *, & *, & sxx, & *, & v=0 & \text{durch} & x+p, & \& \quad x\pm\sqrt{-\dfrac{v}{s}}=0. \\
x^6, & *, & qx^4, & *, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+\dfrac{v}{s}=0, & \& \quad x\pm\sqrt{-q}=0. \\
x^6, & px^5, & *, & *, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & x+p=0, & \& \quad x+\dfrac{v}{s}=0.
\end{array}
$$

2. Teil

Wenn eine gewisse Gleichung, die 6 oder weniger Dimensionen hat, aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von welchen die eine von entweder zwei oder mehr Dimensionen ist, und nur zwei Terme hat, so wird ihre Form eine bestimmte aus den folgenden sein und wird durch eine bestimmte ihr beigefügte Gleichung dividiert werden können.

1. *Durch $xx\pm$ eine andere bestimmte bekannte Größe $=0$.*

$$x^3, \quad pxx, \quad qx, \quad r=0 \quad \text{durch} \quad xx+q=0, \quad (\& \quad x+p=0.)$$

$$x^4, \quad px^3, \quad qxx, \quad rx, \quad s=0 \quad \text{durch} \quad xx+\frac{r}{p}=0,$$

$$\& \quad xx++\frac{1}{2}q\pm+\sqrt{\frac{1}{4}qq-s}=0.$$

$$x^4, \quad px^3, \quad *, \quad rx, \quad s=0 \quad \text{durch} \quad xx+\frac{r}{p}=0, \quad \& \quad xx\pm\sqrt{-s}=0.$$

$$x^4, \quad *, \quad qxx, \quad *, \quad s=0 \quad \text{durch} \quad xx+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-s}=0,$$

$$\& \quad xx+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-s}=0.$$

$$x^4, \quad *, \quad *, \quad *, \quad s=0 \quad \text{durch} \quad xx+\sqrt{-s}=0, \quad \& \quad xx-\sqrt{-s}=0.$$

$$x^5, \quad px^4, \quad qx^3, \quad rxx, \quad sx, \quad t=0 \quad \text{durch} \quad xx+\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-s}=0,$$

$$\& \quad xx+\frac{r}{2p}\pm\sqrt{\frac{rr}{4pp}-\frac{t}{p}}=0.$$

$$x^5, \quad px^4, \quad qx^3, \quad rxx, \quad *, \quad t=0 \quad \text{durch} \quad xx+q=0,$$

$$\& \quad xx+\frac{r}{2p}\pm\sqrt{\frac{rr}{4pp}-\frac{t}{p}}=0.$$

$$x^5, \quad px^4, \quad qx^3, \quad *, \quad *, \quad t=0 \quad \text{durch} \quad xx+q=0, \quad \& \quad xx\pm\sqrt{-\frac{t}{p}}=0.$$

$$x^5, \quad *, \quad *, \quad rxx, \quad sx, \quad t=0 \quad \text{durch} \quad xx+\frac{t}{r}=0, \quad \& \quad xx\pm\sqrt{-s}=0.$$

$$x^5, \quad *, \quad qx^3, \quad rxx, \quad sx, \quad t=0 \quad \text{durch} \quad xx+\frac{t}{r}=0,$$

$$\& \quad xx+\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-s}=0.$$

$$\begin{array}{llllllll}
x^5, & px^4, & *, & *, & sx, & t = 0 & \text{durch} & xx \pm \sqrt{-s} = 0, \\
 & & & & & & \& & xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} = 0. \\
x^5, & px^4, & *, & rxx, & sx, & t = 0 & \text{durch} & xx \pm \sqrt{-s} = 0, \\
 & & & & & & \& & xx \pm \sqrt{-\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} = 0. \\
x^5, & px^4, & qx^3, & *, & sx, & t = 0 & \text{durch} & xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} = 0, \\
 & & & & & & \& & xx + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} = 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
x^6, & px^5, & qx^4, & rx^3, & sxx, & tx, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} = 0. \\
x^6, & px^5, & *, & rx^3, & sxx, & tx, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} = 0. \\
x^6, & px^5, & qx^4, & rx^3, & *, & tx, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} = 0. \\
x^6, & px^5, & *, & rx^3, & *, & tx, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} = 0, \\
 & & & & & & & \& & xx + \sqrt[3]{r} = 0. \\
x^6, & px^5, & *, & rx^3, & sxx, & *, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{p} = 0. \\
x^6, & px^5, & qx^4, & rx^3, & *, & *, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{p} = 0. \\
x^6, & *, & qx^4, & rx^3, & sxx, & tx, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{p} = 0. \\
x^6, & px^5, & *, & rx^3, & *, & *, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{r}{p} = 0. \\
 & & & & & & & \& & xx + \sqrt[3]{v} = 0. \\
x^6, & *, & qx^4, & rx^3, & sxx, & tx, & v = 0 & \text{durch} & xx + \frac{t}{r} = 0.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
x^6, & *, & *, & rx^3, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx+\frac{t}{r}=0.\\
x^6, & *, & qx^4, & rx^3, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx+\frac{t}{r}=0.\\
x^6, & *, & *, & rx^3, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx+\frac{t}{r}=0,\\
 & & & & & & & \& & xx+\sqrt[3]{v}=0.\\
x^6, & px^5, & qx^4, & *, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx\pm\sqrt{-\frac{t}{p}}=0.\\
x^6, & px^5, & qx^4, & *, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx\pm\sqrt{-\frac{t}{p}}=0.\\
x^6, & px^5, & *, & *, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx\pm\sqrt{-\frac{t}{p}}=0.\\
x^6, & px^5, & *, & *, & *, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx\pm\sqrt{-\frac{t}{p}}=0,\\
 & & & & & & & \& & xx+\sqrt[3]{v}=0.\\
x^6, & *, & qx^4, & *, & sxx, & *, & v=0 & \text{durch} & xx+y=0,\\
 & & & & & & & \text{mit} & y^3-qyy+sy-v=0.\\
x^6, & *, & *, & *, & sxx, & tx, & v=0 & \text{durch} & xx+y=0,\\
 & & & & & & & \text{mit} & y^3+sy-v=0.\\
x^6, & *, & qx^4, & *, & *, & *, & v=0 & \text{durch} & xx+y=0,\\
 & & & & & & & \text{mit} & y^3-qyy-v=0.\\
x^6, & *, & *, & *, & *, & *, & v=0 & \text{durch} & xx+\sqrt[3]{v}=0.
\end{array}
$$

2. *Durch* $x^3\pm$ *eine andere bekannte Größe* $= 0$.

$$x^4,\quad px^3,\quad *,\quad rx,\quad s=0 \quad \text{durch} \quad x^3+r=0, \quad \& \quad x^3+\frac{s}{p}=0 \quad (\& \quad x+p=0)$$

$$x^5 \quad px^4,\quad qx^3,\quad rxx,\quad sx,\quad t=0 \quad \text{durch} \quad x^3+r=0, \quad x^3+\frac{s}{p}=0, \quad \& \quad x^3+\frac{t}{q}=0.$$

$$x^5 \quad *,\quad qx^3,\quad rxx,\quad *,\quad t=0 \quad \text{durch} \quad x^3+r=0, \quad \& \quad x^3+\frac{t}{q}=0, \quad (\& \quad xx+q=0)$$

$$x^6,\quad px^5,\quad qx^4,\quad rx^3,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{s}{p}=0, \quad x^3+\frac{t}{q}=0,$$

$$\& \quad x^3+\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr-v}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad qx^4,\quad *,\quad sxx,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{s}{p}=0, \quad x^3+\frac{t}{q}=0,$$

$$\& \quad x^3\pm\sqrt{-v}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad *,\quad *,\quad sxx,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{s}{p}=0, \quad \& \quad x^3+\sqrt{-v}=0.$$

$$x^6,\quad px^5,\quad *,\quad rx^3,\quad sxx,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{s}{p}=0, \quad \& \quad x^3++\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr-v}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad qx^4,\quad *,\quad *,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{t}{p}=0, \quad \& \quad x^3+\sqrt{-v}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad qx^4,\quad rx^3,\quad *,\quad tx,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{t}{q}=0, \quad \& \quad x^3+\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr-v}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad *,\quad rx^3,\quad *,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr-v}=0,$$

$$\& \quad x^3+\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}rr-v}=0.$$

$$x^6,\quad *,\quad *,\quad *,\quad *,\quad *,\quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^3+\sqrt{-v}=0, \quad \& \quad x^3-\sqrt{-v}=0.$$

3. *Durch* $x^4\pm$ *einer anderen bekannten Größe* $= 0$.

$$x^5, \quad px^4, \quad *, \quad *, \quad sx, \quad t=0 \quad \text{durch} \quad x^4+s=0, \quad \& \quad x^4+\frac{t}{p}=0, \quad (\& \quad x+p=0)$$

$$x^6, \quad px^5, \quad qx^4, \quad *, \quad sxx, \quad tx, \quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^4+s=0, \quad x^4+\frac{t}{p}=0, \quad \& \quad x+\frac{v}{q}=0.$$

$$x^6, \quad *, \quad qx^4, \quad *, \quad sxx, \quad *, \quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^4+s=0, \quad \& \quad x^4+\frac{v}{q}=0, \quad (\& \quad xx+q=0.)$$

4. *Durch* $x^5 \pm$ *einer anderen bekannten Größe* $= 0$.

$$x^6, \quad px^5, \quad *, \quad *, \quad *, \quad tx, \quad v=0 \quad \text{durch} \quad x^5+t=0, \quad \& \quad x^4+\frac{v}{p}=0, \quad (\& \quad x+p=0.)$$

3. Teil

Wenn eine bestimmte Gleichung von 5 Dimensionen aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, von welche eine zwei Dimensionen und keinen Term $= 0$ besitzt, die andere hingegen einen Term $= 0$ beinhaltet, wird ihre Form eine aus den folgenden sein und wird entweder durch eine einzige ihr beigefügte Gleichung geteilt werden können oder durch mehrere derer. Durch *genau eine*, wo man das Zeichen & findet; durch *mehrere*, wo man das Wort *oder* findet - wie zuvor.

Die bekannte Größe des 2. Terms der folgenden quadratischen Gleichungen, mit ihrem Vozeichen $+$ oder $-$, werde ich der Kürze wegen y nennen, und den letzten Term z.

$$x^5, \quad px^4, \quad qx^3, \quad rxx, \quad sx, \quad t=0 \qquad \text{durch} \quad xx+px+\frac{1}{2}q-\frac{r}{2p}\pm\sqrt{\frac{1}{2}q-\left(\frac{r}{2p}\right)^2+\frac{t}{p}}=0,$$

$$\textit{oder} \quad \text{durch} \quad xx+\left(\frac{1}{2}p+\frac{t}{2s}\pm\sqrt{\frac{1}{2}p+\left(\frac{t}{2s}\right)^2-q}\right)x+\frac{yt}{s}=0,$$

$$\textit{oder} \quad \text{durch} \quad x^3+r=0.$$

$x^5, \quad px^4, \quad *, \quad rxx, \quad sx, \quad t = 0$ durch $xx + px - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} = 0,$

oder durch $xx + \left(p + \frac{t}{s}\right)x + \frac{\gamma t}{s} = 0.$

$x^5, \quad px^4, \quad *, \quad *, \quad sx, \quad t = 0$ durch $xx + px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} = 0$

oder durch diese $\begin{cases} xx + \left(p + \frac{t}{s}\right)x + \frac{\gamma t}{s} = 0. \\ xx \pm \frac{s}{t}\sqrt{s}x \pm \sqrt{s} = 0. \end{cases}$

$x^5, \quad px^4, \quad qx^3, \quad rxx, \quad *, \quad t = 0$ durch $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q - \left(\frac{r}{2p}\right)^2 + \frac{t}{p}} = 0,$

& durch $xx + px + \frac{t}{2r} \pm \sqrt{\frac{tt}{4rr} - \frac{ppt}{r}} = 0.$

$x^5, \quad px^4, \quad *, \quad rxx, \quad *, \quad t = 0$ durch $xx + px + \frac{1}{2}pp \pm \sqrt{\frac{t}{4}p^4 + pr} = 0,$

& durch $xx + px + \sqrt[3]{pt} = 0,$

& durch $xx + px - \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} = 0.$

$x^5, \quad px^4, \quad qx^3, \quad *, \quad *, \quad t = 0$ durch $xx + px + pp = 0,$

& durch $xx + px + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} = 0.$

$x^5, \quad px^4, \quad *, \quad *, \quad *, \quad t = 0$ durch $xx + px + pp = 0,$

& durch $xx + px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} = 0.$

$x^5, \quad *, \quad qx^3, \quad rxx, \quad sx, \quad t = 0$ durch $xx + \left(\frac{t}{2s} + \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}\right)x + \frac{yt}{s} = 0.$

$x^5, \quad *, \quad *, \quad rxx, \quad sx, \quad t = 0$ durch $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} = 0.$

$x^5, \quad *, \quad qx^3, \quad rxx, \quad sx, \quad t = 0$ durch $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} = 0,$

& durch $xx \pm \sqrt{\frac{s}{z}}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} = 0,$

& durch $xx + \left(\frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}\right)x + \frac{yt}{s} = 0,$

& durch $xx + x\sqrt[3]{\frac{ss}{t}} + \sqrt[3]{\frac{tt}{s}} = 0.$

$$
\begin{array}{rll}
x^5, \quad *, \quad *, \quad *, \quad sx, \quad t=0 & \text{durch} & \pm\frac{s}{t}\sqrt{s}x \pm \sqrt{s} = 0, \\
\& & \text{durch} & xx + \sqrt{\sqrt{s}}x + \pm\sqrt{s} = 0, \\
\& & \text{durch} & xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} = 0, \\
\& & \text{durch} & xx + \sqrt[3]{\frac{ss}{t}}x + \sqrt[3]{\frac{tt}{s}} = 0, \\
\& & \text{durch} & xx + \sqrt[4]{t}x + \frac{tt}{ss} = 0.
\end{array}
$$

Zum 1. und 3. Teil sollte angemerkt werden, wenn es nicht bekannt ist, ob die vorgelegte Gleichung aus zwei anderen, die die geforderten Bedingungen erfüllen, erzeugt werden kann, dass sich dies meistens sehr leicht herausfinden lässt: Denn wann auch immer die Teiler, welche mit dem Zeichen & verknüpft sind, bezogen auf alle Terme einander nicht entsprechen, ist zu schließen, dass die vorgelegte Gleichung so nicht erzeugt werden kann, sogar dass in diesem Fall die Division falsch wäre. Eines Beispiels wegen, wenn die Gleichung $x^6 - xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{2} = 0$ vorgelegt ist, welche von dieser Form ist $x^6 + sxx + tx + v = 0$, wird sie gemäß des 1. Teils durch $x + \frac{v}{s} = 0$ und durch $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} = 0$ und durch $x \pm \frac{t}{v}\sqrt{-s} = 0$ und durch $x - \sqrt[3]{\frac{ss}{v}} = 0$ und durch $x - \frac{st^3}{v^3} = 0$ teilbar sein, wenn sie *aus der Multiplikation zweier anderer* erzeugt werden kann, *deren eine von einer Dimension ist, die andere hingegen einen oder mehrere Terme nicht besitzt.* Um aber zu erörtern, ob dies möglich ist, ist es nicht nötig, die Division durch einen bestimmten Teiler zu untersuchen, weil hier zwei nicht übereinstimmende Teiler gefunden werden: Nämlich $x + \frac{v}{t} = 0$ und $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} = 0$, und $\frac{v}{t}$ ist rational und $\sqrt{\sqrt{-s}}$ bezeichnet eine irrationale Zahl. Und weil die Unteilbarkeit oftmals auch auf den ersten Blick aus den verschieden Zeichen klar ist, wie, wenn wir eines Beispiels wegen anstelle von $-\sqrt{3}$ hier $+\sqrt{3}$ hätten, in welchem Fall die $\sqrt{\ }$ aus $-s$ gar nicht hätte gebildet werden können. Wir werden indes darüber hinaus einige aufwändige Multiplikationen und Divisionen, die andernfalls durchzuführen wären, haben können. Des besseren Verständnisses wegen möchte ich ein Beispiel hinzufügen. Die Divisoren der Gleichung $x^5 + sx + t = 0$ sind gemäß des 3. Teils $xx \pm \frac{s}{t}\sqrt{s}x \pm \sqrt{s} = 0$; & $xx \pm \sqrt{\sqrt{s}}x \pm \sqrt{s} = 0$; & $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} = 0$;

& $xx + \sqrt[3]{\frac{ss}{t}}x + \sqrt[3]{\frac{tt}{s}} = 0$; & $xx + \sqrt[4]{t}x + \frac{tt}{ss} = 0$: Wenn nun in Erfahrung gebracht wird, dass $\pm\frac{s}{t}\sqrt{s}$ nicht $= \sqrt{\sqrt{s}}$ oder $= \frac{t}{s}$ oder $= \sqrt[3]{\frac{ss}{t}}$ oder $= \sqrt[4]{t}$ ist, welches die bekannten Größen des 2. Terms sind, oder dass die letzten Terme $\pm\sqrt{s}$ und $+\frac{tt}{ss}$ etc. nicht zusammenpassen, wäre dies ein Anzeichen, dass die vorgelegte Gleichung nicht *aus der Multiplikation zweier anderer* erzeugt werden kann, *deren eine zwei Dimensionen hat und keinen Term* $= 0$ *besitzt, die andere hingegen einen Term* $= 0$ *aufweist.*

4. Teil

Wenn eine Gleichung von 6 Dimensionen aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, deren eine zwei Dimensionen und keinen Term $= 0$ besitzt, die andere hingegen einen oder mehere Terme $= 0$ aufweist, wird sie durch $xx + yx + z = 0$ teilbar sein, wobei die Werte von y und z durch die folgenden Gleichungen und auf die folgende Weise zu finden sind.

Die vorgelegte Gleichung, ob in ihr ein Term fehlt oder nicht, werde ich so darstellen: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, wo p die bekannte Größe des 2. Terms bezeichnet, oder eben 0, wenn er fehlt; q die bekannte Größe des 3. Terms, oder 0, wenn er fehlt; r die des 4. Terms etc.

$$
\begin{array}{lllllll}
A & zz - 2qz & + ppq = 0 & \qquad & zz - \frac{t}{p}z & + 2v = 0 & \qquad y = p \\
 & \quad - pp & - rp & & \quad - s & & \\
 & \quad + \frac{r}{p} & + s & & \quad + rp & & \\
 & & - \frac{t}{p} & & \quad - ppq & & \\
\hline
 & \quad 2 & & & \quad + \frac{r}{p} + pp & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
B & y^3 & -\, pyy & +\, qy & -\, r & = 0 \\
 & & -\, \dfrac{2v}{t} & +\, \dfrac{pv}{t} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
yy & -\, \dfrac{qt}{v} y & +\, \dfrac{t^4}{v^3} = 0 \\
 & -\, p & +\, \dfrac{rt}{v} \\
 & +\, \dfrac{rtt}{vv} & \\
 & -\, \dfrac{t^3 s}{v^3} & \\
\hline
 & 2 &
\end{array}
\qquad
z = \frac{yv}{t}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
C & y^4 & -\, \dfrac{q}{p} y^3 & +\, 3qyy & -\, \dfrac{s}{p} y & +\, \dfrac{t}{p} & = 0 \\
 & & -\, 2p & +\, pp & -\, 2pq & +\, qq & \\
 & & & & -\, \dfrac{qq}{p} & -\, \dfrac{rq}{p} & \\
 & & & & +\, r & & \\
 & & -\, \dfrac{t}{s} y^3 & +\, \dfrac{tp}{s} yy & -\, \dfrac{tq}{s} y & -\, \dfrac{vq}{s} & = 0 \\
 & & +\, \dfrac{q}{p} & -\, q & +\, \dfrac{vp}{s} & -\, \dfrac{t}{p} & \\
 & & & & +\, \dfrac{s}{p} & +\, \dfrac{rq}{p} & \\
 & & & & +\, \dfrac{qq}{p} & & \\
 & & & & -\, r & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
y^4 & -\, \dfrac{t}{s} y^3 & +\, ppyy & -\, 2pqy & +\, qq & = 0 \\
 & -\, 2p & +\, \dfrac{tp}{s} & -\, \dfrac{tq}{s} & -\, \dfrac{vq}{s} & \\
 & & & +\, 2q & +\, \dfrac{vp}{s} & \\
 & & & & & \\
z \;= & & -\, py & +\, yy & +\, q &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
D & +\, qy^3 & +\, sy & -\, t & = 0 \\
 & & +\, qq & +\, rq &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
+\, sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs = 0 \\
\hfill -\, vq \;= 0 \\
\hfill z \;= yy \;+ q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
e & f & g \\
y = p & y = p & y = \dfrac{t}{s} \\
z = q & z = q - \dfrac{r}{p} = \dfrac{vp}{t} & z = \dfrac{v}{s}
\end{array}
$$

Wannimmer keine Terme in der vorgelegten Gleichung $= 0$ sind, wird jene durch eine dieser Größen A, B, C, d, e, f geteilt werden können.

Wann immer gilt	$p = 0$	$\cdots$	durch eine von diesen		B, D, g
	q	$--$	$--$	$--$	A, B, C, f, g
	r	$--$	$--$	$--$	A, B, C
	s	$--$	$--$	$--$	A, B, C, e, f
	t	$--$	$--$	$--$	A, C, e
	p, q	$--$	$--$	$--$	B, D, g
	p, r	$--$	$--$	$--$	B, D
	p, s	$--$	$--$	$--$	B, D
	p, t	$--$	$--$	$--$	A, B, C
	q, s	$--$	$--$	$--$	A, B, C, f
	q, t	$--$	$--$	$--$	A, C
	r, s	$--$	$--$	$--$	A, B, C
	r, t	$--$	$--$	$--$	A, C
	s, t	$--$	$--$	$--$	A, C, e
	p, q, r	$--$	$--$	$--$	B, D
	p, q, s	$--$	$--$	$--$	B
	p, r, s	$--$	$--$	$--$	B, D
	p, r, t	$--$	$--$	$--$	D
	q, r, s	$--$	$--$	$--$	A, B, C
	q, r, t	$--$	$--$	$--$	A, C
	q, s, t	$--$	$--$	$--$	A, C
	r, s, t	$--$	$--$	$--$	A, C
	p, q, r, s	$--$	$--$	$--$	B
	p, q, r, t	$--$	es wird	gelten	$y^6 + ry^3 + v = 0, \quad \& \quad z = yy.$
	q, r, s, t	$--$	$--$	$--$	A
	p, q, r, s, t	$--$	es wird	gelten	$y^6 + v = 0, \quad \& \quad z = yy.$

1. Für A oder B oder auch C lässt sich entweder eine der vorgelegten Gleichungen nach Belieben annehmen, indem man mit ihrer Hilfe bloß den Wert von y

oder z sucht, oder zwei, die die selbe Größe haben, wenn man, wie es oben gezeigt worden ist, deren gemeinsamen Teiler sucht, der entweder von einer oder mehreren Dimensionen sein wird. Wenn er von einer Dimension ist, wird man den gesuchten Wert von y oder z haben, wenn er mehrere Dimensionen hat, muss derselbe aus diesem gemeinsamen Teiler gefunden werden.

2. Wenn wir die Untersuchung zuerst mithilfe der Großbuchstaben A, B, C, D anstellen wollen, sind die übrigen e, f, g nicht notwendig, aber nicht umgekehrt.
Es sei eines Beispiels wegen folgende Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{l} x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3xx - 13x - 5 = 0. \\ \qquad\; p \qquad q \qquad r \qquad s \qquad t \qquad v \end{array}$$

Weil hier kein Term fehlt, ist die Gleichung mithilfe von A, B, C, e, f, g zu untersuchen und zwar mit allen, wenn wir mit den Kleinbuchstaben g, f, e anfangen, wenn wir aber mit den Großbuchstaben anfangen, sind die Kleinbuchstaben unnötig. Daher wollen wir mit den Großbuchstaben beginnen, und zwar mit A, für welchen sich daher diese Gleichung annehemen lässt

$$\begin{array}{llll} zz & - 2qz & + ppq & = 0 \\ & - pp & - rp & \\ & + \dfrac{r}{p} & + s & \\ & & - \dfrac{t}{p} & \\ \hline & & 2 & \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{llll} zz & - \dfrac{t}{p}z & + 2v & = 0 \\ & - s & & \\ & + rp & & \\ & - ppq & & \\ \hline & \dfrac{r}{p} & + pp & \end{array}$$

oder beide. Wenn wir die erste nehmen, wird man für selbige (weil ja $p = 2$, $q = -3$, $r = 7$, $s = -3$, $t = -13$ und $v = -5$ ist) $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} = 0$ erhalten; wenn wir die andere nehmen, wird man $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 10 = 0$ erhalten, und der gemeinsame Teiler beider Gleichungen ist $z + 5 = 0$. Weil ja aber $y = p = 2$ ist, so ist durch $xx + yx + z = 0 = xx + 2x - 5 = 0$ zu teilen, und man wird für den Quotienten $x^4 + 2xx + 3x + 1 = 0$ finden. Und es ist offenkundig, dass wir nur die eine jener beiden Gleichungen benutzen können. Deshalb wird der leichtere Weg zu wählen sein: Denn nicht immer ist jener über den gemeinsamen Teiler kürzer, aber auch nicht immer länger; aber er hat diesen Vorzug, welcher nicht gerade klein ist, dass er unbrauchbare Wurzeln eliminiert. So wie es aus dem folgenden Beispiel deutlich werden wird.

So sei die Gleichung $x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 5x - 1 = 0$ vorgelegt. Weil ja hier $p = 0$ ist, wird die Reduktion mithilfe von B, D, g zu versuchen sein. Mit B beginnend wird man für die 1.

$$\begin{array}{l} y^3 - pyy + qy \;\; - r = 0 \\ \qquad\; - \dfrac{2v}{t} \;\; + \dfrac{pv}{t} \end{array}$$

diese Gleichung finden: $y^3 - \frac{2}{5}yy - 2y - 3 = 0$; und für die 2.

$$\begin{array}{l} yy - \dfrac{qt}{v}y + \dfrac{t^4}{v^3} = 0 \\ \qquad - p \quad + \dfrac{rt}{v} \\ \qquad + \dfrac{rtt}{vv} \\ \qquad - \dfrac{t^3s}{v^3} \\ \hline \qquad\qquad 2 \end{array}$$

diese $yy + 230y - 305 = 0$: Denn in diesem Beispiel ist $q = -2$, $r = 3$, $s = -3$, $t = -5$ und $v = -r$. Daher, indem man deren gemeinsamen Teiler sucht, wird man in Erfahrung bringen, dass keiner gegeben ist, und daher die Divison durch B nicht möglich ist. Daher gehe ich zu D über, wo ich für die 1. Gleichung

$$\begin{aligned} qy^3 + sy - t \quad &= 0 \\ + qq + rq & \end{aligned}$$

die Gleichung $-2y^3 + 1y - 1 = 0$ finde, und für die zweite

$$\begin{aligned} sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs &= 0 \\ - vq & \end{aligned}$$

finde ich $-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 14 = 0$. Der gemeinsame Teiler dieser Gleichungen ist $y + 1 = 0$; und daher ist $z = yy + q = -1$; so dass durch $xx + yx + z = 0 = xx - 1x - 1$ geteilt werden muss, und der Quotient wird $x^4 + 1x^3 + 4x + 1 = 0$ sein.
Hier ist anzumerken, dass diese Art den gemeinsamen Teiler zu finden vor allem in höheren Gleichungen von riesigem Nutzen ist, aber nicht von so großem Nutzen, wenn die Gleichungen, deren gemeinsamer Teiler zu ermitteln ist, nur von 2 Dimensionen ist, oder sogar von drei, weil ja dann die Teiler leicht zu finden sind. Wie in der oberen Gleichung $-2y^3 + 1y - 1 = 0$, wo unmittelbar klar ist, dass $y = -1$ ist, und daher, wenn sie durch $y + 1 = 0$ geteilt wird, wird man $-2yy + 2y - 1 = 0$ erhalten. Weil die Wurzeln dieser ja unmögliche sind[5], bleibt bloß $y = -1$ übrig; sodass die Division der vorgelegten Gleichung durch $xx - 1x - 1 = 0$ zu versuchen ist.
So und wenn man die Gleichung $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 = 0$ hat, wird man in Erfahrung bringen, dass die Division mithilfe der Gleichungen gemäß B möglich ist, wo man für die eine $2yy - 5y + 3 = 0$ findet, und für die andere $y^3 - 4yy + 5y - 2 = 0$, und für den gemeinsamen Teiler $y - 1 = 0$. Und weil ja $z = \frac{yv}{t} = 1$ ist, wird $xx + yx + z = 0 = xx + 1x + 1 = 0$ sein. Wenn also die vorgelegte Gleichung durch diese geteilt wird, wird der Quotient $x^4 + 1x^3 + 1xx + 1 = 0$ sein.

Wenn aber die Gleichung $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 1xx + 14x + 2 = 0$ gegeben ist, in welcher $r = 0$ ist, muss man sie mithilfe von A, B und C untersuchen. Aber mit A beginnend, findet man anstelle von

[5] Hudde meint damit hier imaginäre Wurzeln.

$$\begin{array}{l} zz - 2qz + ppq = 0 \\ \quad - pp \ \ - rp \\ \quad + \dfrac{r}{p} \quad + s \\ \qquad\quad - \dfrac{t}{p} \\ \hline \qquad 2 \end{array}$$

$zz - 4z + 1 = 0$, und anstelle der Gleichung

$$\begin{array}{l} zz - \dfrac{t}{p}z \ + 2v = 0 \\ \quad - s \\ \quad + rp \\ \quad - ppq \\ \hline \quad \dfrac{r}{p} \quad + pp \end{array}$$

findet man dieselbe $zz - 4z + 1 = 0$. Aus dieser, weil es der gemeinsame Teiler der beiden ist, muss man die Wurzeln finden, welche $z = 2 + \sqrt{3}$ und $z = 2 - \sqrt{3}$ sind. Daher weil $y = p$ ist, das heißt, 2, wird man für $xx + yx + z = 0$ diese zwei erhalten $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} = 0$ und $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} = 0$. Wenn also die vorgelegte Gleichung durch diese geteilt wird, wird man in Erfahrung bringen, dass sie aus aus der Multiplikation dieser drei erzeugt werden kann $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} = 0$, $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} = 0$ und $xx - 2x + 2 = 0$.

5. Teil

Wenn eine Gleichung von 6 Dimensionen aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, welche je 3 Dimensionen haben, in der einen von welchen ein oder mehrere Terme $= 0$ sind, wird dieselbe entweder durch eine Gleichung mit nur 2 Termen teilbar sein, entspechend dem 2. Teil, oder durch eine Gleichung $x^3 + yxx + zx + w = 0$, in welcher nur einer der beiden y und $z = 0$ ist; und die Werte von y, z und w findet man durch die folgenden Gleichungen.

Die vorgelegte Gleichung, ob in ihr ein bestimmter Term fehlt oder nicht, werde ich wie folgt darstellen: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$; hier bezeichnet p die bekannte Größe des 2. Terms, oder 0, wenn er fehlt; q die bekannte Größe des 3. Terms, oder 0, wenn er fehlt; r die des vierten Terms etc.

$$
\begin{array}{lllllllllll}
A & 2z^3 & -3qzz & -rpz & -sq = 0 & +qqzz & +4sqz & -4ss & = 0 & & w = \dfrac{s + zz - qz}{p} \\
 & & +pp & +2s & +tp & +p^4 & -3pqr & -4ppv & & & \\
 & & & +qq & & -4s & -2pps & +4psv & & & \\
 & & & & & +2pr & +2tp & +sqq & & & \\
 & & & & & & -2q^3 & -ptq & & & y = 0 \\
 & & & & & & +qqpp & +tp^3 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllllll}
B & y^4 & -\dfrac{qt}{v}y^3 & +\dfrac{pqt}{v}yy & -\dfrac{st}{v}y & -qq = 0 & y^4 & -2py^3 & +qyy & -ry & +pr & = 0 \\
 & & -p & -qp & -\dfrac{tt}{v} & & +\dfrac{2v}{t} & +pp & -pq & -s & & \\
 & & & -\dfrac{qqt}{v} & +\dfrac{rtq}{v} & & & -\dfrac{3pv}{t} & +\dfrac{2qv}{t} & -\dfrac{pqv}{t} & & \\
 & & & & & & & & +\dfrac{ppv}{t} & & & \\
 & & & & & & & & & & w & = \dfrac{t}{q - py + yy} \\
 & & & & & & & & & & z & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
C & zz - qz + s = 0 & ww - rw + v = 0 & y = 0. \\
D & yy - pz + q = 0 & ww - rw + v = 0 & z = 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
e & z = q & w = \dfrac{s}{p} & y = 0. \\
f & y = p & w = \dfrac{t}{q} & z = 0.
\end{array}
$$

Wannimmer keine Terme in der vorgelegten Gleichung $= 0$ sind, wird jene durch eine von diesen geteilt werden können A, B, e, f.

Wann immer gilt	$p = 0$	$\cdots$	durch eine von diesen		C, B
	q	$--$	$--$	$--$	A, B
	r	$--$	$--$	$--$	A, B, e, f
	s	$--$	$--$	$--$	A, B
	t	$--$	$--$	$--$	A, D
	p, q	$--$	$--$	$--$	C, B
	p, r	$--$	$--$	$--$	C, B
	p, s	$--$	$--$	$--$	B
	p, t	$--$	$--$	$--$	C, D
	q, r	$--$	$--$	$--$	A, B
	q, s	$--$	$--$	$--$	A, B
	q, t	$--$	$--$	$--$	A
	r, s	$--$	$--$	$--$	A, B
	r, t	$--$	$--$	$--$	A, D
	s, t	$--$	$--$	$--$	A, D
	p, q, r	$--$	$--$	$--$	C, B
	p, q, s	$--$	$--$	$--$	B
	p, q, t	$--$	$--$	$--$	C
	p, r, s	$--$	$--$	$--$	B
	p, r, t	$--$	$--$	$--$	C, D
	p, s, t	$--$	$--$	$--$	D
	q, r, s	$--$	$--$	$--$	A, B
	q, r, t	$--$	$--$	$--$	A
	r, s, t	$--$	$--$	$--$	A, D
	p, q, r, s	$--$	$--$	$--$	B
	q, r, s, t	$--$	$--$	$--$	A

1. Für A oder B lässt sich entweder einer der vorgelegten Gleichungen nach Belieben annehmen, indem man bloß mit ihrer Hilfe den Wert von y oder z

sucht, oder zwei, die dieselbe bekannte Größe involvieren, wenn man über ihren gemeinsamen Teiler die Werte von y oder z auf dieselbe Weise sucht wie es im 4. Teil erklärt worden ist.
Wenn man die Untersuchung zuerst mithilfe der Großbuchstaben A, B durchführt, dann ist die Untersuchung mithilfe der Buchstaben e und f als überflüssig anzusehen, aber nicht umgekehrt.
Eines Beispiels wegen sei diese Gleichung vorgelegt $x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 = 0$. Weil ja keine Terme fehlen, wird die Reduktion über A, B, e, f zu versuchen sein; und mit dem Kleinbuchstaben beginned, genauer mit e, wird man haben: $z = q = 4$ und $w = \frac{s}{p} = 5$ und daher wird für $x^3 + yxx + zx + w = 0$ $x^3 + 4x + 5 = 0$ werden. Weil ja aber die vorgelegte Gleichung nicht durch diese geteilt werden kann, gehe ich über zu f, und ich erhalte $y = p = 1$; $w = \dfrac{t}{q} = \frac{11}{4}$; $z = 0$; und anstelle von $x^3 + yxx + zx + w = 0$ wird man $x^3 + 1xx + \frac{11}{4} = 0$ erhalten. Und weil die vorgelegte auch durch diese nicht teilbar ist, gehe ich zu A über, und für

$$\begin{array}{llll} 2z^3 & - 3qzz & - rpz & - sq = 0 \\ & + pp & + 2s & + tp \\ & & + qq & \end{array}$$

erhalte ich $2z^3 - 11zz + 18z - 9 = 0$, deren Wurzeln $+3$, $+1$ und $+1\frac{1}{2}$ sind. Weil ja aber all diese Wurzeln rational sind und die vorgelegte Gleichung frei von gebrochenen Zahlen ist, wird uns diese letzte Wurzel nicht helfen. Daher sind bloß noch $z = 3$ und $z = 1$ zu untersuchen. Indem man aber $z = 1$ nimmt, findet man, dass die Division nicht möglich ist, und daher, wenn man $z = 3$ nimmt, wird $w = \frac{s+zz-qz}{p} = 2$ werden. Weil ja aber $y = 0$ ist, wird man für $x^3 + yxx + zx + w = 0$ die Gleichung $x^3 + 3x + 2 = 0$ erhalten, wenn die Division durch selbige versucht wird, wird man in Erfahrung bringen, dass selbige möglich ist und $x^3 + 1xx + 1x + 3 = 0$ entspringt. Aber anstelle der 1. Gleichung hätten wir gleichermaßen auch die 2. nehmen können, die eine Dimension weniger besitzt und für welche wir $13zz - 60z + 63 = 0$ erhalten hätten. Diese lässt nur eine einzige ganzzahlige Wurzel zu, die, wie oben, $+3$ ist.
Und es ist zu bemerken, dass, nachdem diese zwei Gleichungen gefunden worden sind, (diese müssen immer, wenn wir das Gesuchte mithilfe eines gemeinsamen Teilers erhalten wollen, gefunden werden.) die Wurzel der einen

der beiden Gleichungen gefunden werden kann, wenn sie leicht zu finden ist, und es kann untersucht werden, ob auch die andere Gleichung die besagte Wurzel zulässt: Das verringert die Arbeit oftmals nicht unwesentlich.
Bevor ich diese Diskussion der 11. Regel hier zum Abschluss bringe, möchte ich noch hinzufügen, dass in gleicher Weise wie diese Regeln gefunden worden sind auch die übrigen für höhere Gleichungen gefunden werden können; und natürlich lasse ich vieles um nicht zu sagen unendlich viel anderes zu Gleichungen von 6 und weniger Dimensionen, von denen ich einige der leichteren Eigenschaften angeben wollte, hier aus, welches alles zwar nicht sehr schwierig ist, jedoch eine gewisse Bestimmungsgleichung involviert. Wie im 1. Teil, wo ich in der Gleichung $x^6 + px^5 + qx^4 + sxx + tx + v = 0$ anstelle des Teilers $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} = 0$ den Teiler $x - \frac{v-qs}{ps-t} = 0$ hätte hinzufügen können: Diesen, weil er eine Bedingung involviert, (weil ja $x + 3 = 0$ ist, kann der Teiler der Gleichung $x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 5xx + 25x + 30 = 0$ durch jenen nicht gefunden werden:) habe ich wegzulassen angeleitet, indem ich ihm den anderen $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} = 0$ vorgezogen habe, welcher der Bedingung nicht unterworfen ist.
Schließlich erstreckt sich der Anwendungsbereich dieser 11. Regel so weit, dass jeder, der die vorherigen Abschnitte betrachtet, leicht bestätigt, dass es nicht nötig ist, Brüche oder bekannte surdische Größen zuvor aus der Gleichung zu eliminieren und dass ein und dieselbe Gleichung, egal wie zusammengesetzt und von wie vielen Dimensionen sie ist, auf viele Arten aus der Multiplikation zweier anderer erzeugt werden kann, und dann von all jenen, aus welchen sie erzeugt werden kann, nur eine verlangt wird, in welcher ein oder mehrere Terme fehlen, damit die Reduktion mithilfe dieser Regeln gefunden wird.

Die folgende 12., 13., 14. und 15. Regel beziehen sich auf Gleichungen, in denen weder Wurzeln noch literale Brüche enthalten sind.

12. Regel

Wenn in der vorgelegten Gleichung ein bekannter Buchstabe gefunden wird, *der nicht im letzten Term enthalten ist*, und jener nur einmal in der Gleichung auftritt oder nur einmal mit derselben Anzahl an Dimensionen gefunden wird, (wie in der Gleichung

$$
\begin{array}{lllll}
x^4 & -\,2ax^3 & +\,aaxx & -\,2abx & +\,aabb = 0 \\
 & -\,2c & +\,bb & -\,2acc & \\
 & & +\,4ac & & \\
 & & -\,dd & &
\end{array}
$$

in welcher man dd, also d von zwei Dimensionen, bloß einmal findet.) wird die Gleichung nie durch x oder xx etc. $+$ oder $-$ eine gewisse bekannte und rational Größe teilbar sein.

13. Regel

Wenn in der vorgelegten Gleichung ein bekannter Buchstabe gefunden wird, *der im letzten Term nicht enthalten ist* und jener überall mit demselben Vorzeichen $+$ oder $-$ behaftet ist, und selbiger überall mit der unbekannten Größe, die überall entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl an Dimensionen besitzt, multipliziert ist, wird jene Gleichung nie durch $x+$ oder $-$ oder durch xx, x^3 etc. $-$ eine gewisse bekannte und rationale Größe teilbar sein. Wie diese Gleichung

$$
\begin{array}{lllll}
x^4 & +\,4cx^3 & -\,ddxx & +\,4bbcx & +\,b^4 = 0 \\
 & & & -\,2bbd &
\end{array}
$$

in welcher c *nur* einmal mit dem Zeichen $+$ behaftet und mit x von einer und drei Dimensionen multipliziert gefunden wird. Oder diese

$$
\begin{array}{llllllll}
x^6 & -\,ax^5 & +\,cfx^4 & -\,c^3x^3 & -\,c^4xx & -\,ddccax & +\,c^3d^3 = 0 \\
 & +\,b & -\,dd & -\,add & +\,ddff & +\,d^3bb &
\end{array}
$$

wo a dreimal überall mit dem Zeichen $-$ behaftet gefunden wird; oder b zweimal mit dem Zeichen $+$, und jeder der beiden multipliziert mit x von ungerader Dimension; oder in welcher auch f zweimal mit dem Zeichen $+$ behaftet gefunden wird, und multipliziert mit x überall von gerader Dimension.

14. Regel

Wenn in der vorgelegten Gleichung ein bekannter Buchstabe gefunden wird, *welcher in keinem anderen als dem letzten Term enthalten ist* und wenn die Anzahl seiner Dimensionen kleiner ist als die Anzahl der Dimensionen der unbekannten Größe, bezogen auf die höchste, (wie in dieser

$$\begin{aligned} x^6 - bbx^4 + b^3c\ \ xx + bcd^4 &= 0 \\ - bbcc \quad + 2bd^5 & \end{aligned}$$

wo d nur im letzten Term enthalten ist und höchstens 5 Dimensionen hat und x mehr besitzt, nämlich 6 Dimensionen), so ist gewiss, dass jene Gleichung durch $x +$ oder $-$ eine bekannte und rationale Größe nicht teilbar ist. Wenn die Anzahl seiner Dimensionen kleiner ist als die Hälfte der Anzahl der Dimensionen der unbekannten Größe, bezogen auf die höchste, (wie in demselben Beispiel, wenn anstelle des letzten Terms $bcd^4 + 2bd^5$ hier $bc^3dd + 2d^5d$ gesetzt wird), ist es gewiss, dass jene Gleichung durch $xx +$ oder $-$ eine gewisse rationale und bekannte Größe nicht teilbar ist. Wenn die Anzahl seiner Dimensionen kleiner ist als ein Drittel der Anzahl der Dimensionen der unbekannten Größe, bezogen auf die höchste Anzahl, so ist gewiss, dass jene Gleichung durch $x^3 +$ oder $-$ etc. nicht geteilt werden kann. Und so weiter bis ins Unendliche.

15. Regel

Wenn in der vorgelegten Gleichung ein bekannter Buchstabe, der im letzten Term nicht enthalten ist, *und sie durch x, xx, x^3 etc. $+$ oder $-$ eine bestimmte rationale und bekannte Größe teilbar ist, wird es leicht sein, mithilfe der anderen Gleichung den besagten Teiler zu finden.*

Wie in dieser Gleichung

$$\begin{aligned} x^5 - fx^4 + bf \quad x^3 - 16bcdxx + \frac{1}{2}bbcfx - 8ccdbb = 0 \\ - 1\frac{1}{2}bc \quad - \frac{1}{2}bcf \qquad\qquad\qquad\qquad \end{aligned}$$

in welcher f im letzten Term nicht enthalten ist, *ist es nur nötig, dass alle Größen, in denen f gleich viele Dimensionen hat, gleich Null gesetzt werden, und weiter der gemeinsame Teiler der beiden, natürlich der gefundenen und der vorgelegten Gleichung, ausfindig gemacht wird.*
Daher, nachdem $-fx^4 + bfx^3 - \frac{1}{2}bcfxx + \frac{1}{2}bbcfx = 0$ oder $-x^3 + bxx - \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bbc = 0$ gesetzt worden ist, findet man, gemäß der zuvor beschriebenen

Methode, $xx + \frac{1}{2}bc = 0$ für deren gemeinsamen Teiler. Wenn diese Gleichung vorgelegt ist

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + aaxx & + c^3 \ \ x & - bc^3 = 0 \\ \quad - b & - ab & - baa & + c^4 \\ \quad + c & - ac & + aac & \end{array}$$

in welcher a im letzten Term nicht enthalten ist, wird, nachdem

$$\begin{array}{l} - ax^3 + abxx = 0 \\ \qquad\quad - ac \end{array}$$

gesetzt worden ist, $x - b + c = 0$ sein. Deshalb ist die Division durch $x - b + c = 0$ zu versuchen; weil sie keinen gemeinsamen Teiler aus diesen haben kann. Wir hätten denselben Divisor erhalten, wenn wir alle Größen, in welchen a von zwei Dimensionen ist, $= 0$ gesetzt hätten. Es ist anzumerken, dass in dieser 12., 13., 14. und 15. Regel es nicht nötig ist, dass immer alle Brüche zuerst aus den Gleichungen eliminiert werden: Denn wenn es sich zuträgt, dass, nachdem diese Brüche weggeschafft worden sind, der Buchstabe, der betrachtet wird, dennoch nur im letzten Term gefunden wird, so wie es in Regel 14 verlangt wird, oder nach jener Elimination nicht im letzten Term gefunden wird, was bei allen anderen Regeln verlangt wird, ist das Wegschaffen solcher Brüche nicht notwendig.

Die folgende 16., 17., 18., 19. und 20. Regel beziehen sich auf Gleichungen, in denen weder Wurzelzeichen noch literale oder numerale Brüche gefunden werden.

Bisher ist es unwesentlich gewesen, ob alle Terme der vorgelegten Gleichung oder die durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Einzelteile der Terme dieselbe Anzahl an Dimensionen haben oder nicht; jedoch werde ich in dieser folgenden 16, 17, 18, 19 und 20 Regel, der Kürze wegen, nur Gleichungen solcher Art betrachten, all deren Glieder dieselbe Anzahl an Dimensionen haben; denn jede Gleichung, die diese Bedingung nicht hat, kann leicht in eine solche verwandelt werden, wie jedem bekannt ist.
Wie alle Wurzelzeichen aus einer Gleichung zu eliminieren sind, habe ich ja schon zuvor gezeigt. Wie aber alle Brüche eliminiert werden können, hat nichts an Schwierigkeit und ist hinreichend von Descartes bei numeralen Brüchen gezeigt worden, was auch in gleicher Weise bei literalen Brüchen

Geltung hat. Aber weil in diesen folgenden Regeln notwendigerweise die rationalen Teiler des letzten Terms geschrieben werden müssen, schicke ich

die Art, alle rationalen Divisoren des letzten Terms, der frei von Wurzeln und Brüchen ist, zu finden,

voraus. Der letzte Term der vorgelegten Gleichung wird entweder aus *einem* oder *mehreren Gliedern* oder Größen, die durch $+$ und $-$ verbunden sind, bestehen. Wenn er *aus nur einem Glied besteht*, ist bekannt, wie die Teiler der Gleichung zu finden sind. Wenn er aber aus *mehreren Gliedern* besteht, ist es oftmals sehr schwierig alle Teiler zu finden. Daher, um diese zu finden, betrachte ich den letzten Term der vorgelegten Gleichung einzeln, indem ich ihn $= 0$ annehme, und nehme nach Belieben einen der Buchstaben, den ich als die unbekannte Größe dieser fiktiven Gleichung ansehe, nach welcher Größe ich dann jene fiktive Gleichung ordne.

Eines Beispiels wegen, aus dem letzten Term dieser Gleichung

$$\begin{array}{llllll} x^4 - 4ax^3 & + 2ccxx & - 4accx & + c^4 & = 0 \\ & + 7aa & - 4aac & - 4a^4 & \\ & + 2ac & - 6a^3 & + 8a^3c & \\ & & & + 2ac^3 & \\ & & & + 3aacc & \end{array}$$

wenn ich den Buchstaben c als unbekannte Größe annehme, finde ich diese Gleichung $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 = 0$.

Darauf untersuche ich durch die vorhergehenden oder folgenden Regeln, ob diese fiktive Gleichung durch eine andere rationale geteilt werden kann. Wenn dies nämlich nicht möglich ist, ist es offenkundig, dass der letzte Term der vorgelegten Gleichung auch keine rationalen Teiler zulässt (außer wenn wir die Einheit und den ganzen Term selbst zu den Teilern zählen wollen; aber diese sind in literalen Gleichungen, wo alle Größen dieselbe Anzahl an Dimensionen haben, von keinem Nutzen.). Wenn er aber geteilt werden kann, ist es wiederum nötig, in gleicher Weise die Teiler dieses Teilers und des Quotienten zu suchen, und so wird es ersichtlich sein, wie alle rationalen Gleichungen, die diese fiktive Gleichung teilen können, gefunden werden können, welche Gleichungen dann freilich die gesuchten Teiler des letzten Terms der vorgelegten Gleichung sind.

Durch die vorgehenden und die folgenden Regeln werden in der Tat alle Teiler dieser fiktiven Gleichung, bevor ihre Teiler des letzten Terms erkannt worden sind, sehr leicht gefunden werden. Und es tauchen wenige Gleichungen auf, deren Teiler des letzten Terms nicht durch die folgende 21. Regel und auf die beschriebene Art gefunden werden können. Weil ja aber irgendwann solche gegeben sind, deren Teiler weder durch diese 21. Regel noch durch eine der vorhergehenden erhalten werden kann, so ist weiter zu sehen, ob der letzte Term der fiktiven Gleichung *ein oder mehrere Glieder* hat. Wenn er nämlich *nur ein Glied* hatte, wie in diesem Beispiel, in welchem der letzte Term $-4a^4$ ist, ist bekannt, auf welche Weise sich die Teiler ausfindig machen lassen und darauf können mit deren Hilfe durch die folgenden Regeln alle rationalen Gleichungen gefunden werden, durch welche diese fiktive Gleichung teilbar ist, und so wird man auch alle Teiler des letzten Terms der vorgelegten Gleichung haben, die verlangt waren.
Wenn aber der letzte Term der fiktiven Gleichung *mehrere Glieder* hatte, dann nehme ich wiederum denselben, wie zuvor, als $= 0$ an, und gehe erneut so vor, wie es schon beschrieben worden ist, bis schließlich eine Gleichung gefunden wird, deren rationale Teiler entweder durch eine der vorhergehenden oder durch Regel 21 sehr leicht gefunden werden, oder deren letzter Term nur aus *einem einzigen Glied* besteht. Und um eines der beiden zu erreichen, wird kaum Zeit benötigt; und nachdem eines der beiden erreicht worden ist, kann das Gesuchte erhalten werden, weil ja dann durch die folgenden Regeln alle Gleichungen gefunden werden können, die diese letzte fiktive Gleichung teilen; und so, nachdem alle Teiler des letzten Terms der unmittelbar vorhergehenden fiktiven Gleichung gefunden worden sind, können durch dieselben Regeln, mithilfe dieser Teiler des letzten Terms, alle Gleichungen gefunden werden, die die diese unmittelbar vorausgehende fiktive Gleichung teilen können, und, indem man so weiter fortschreitet, wird man schließlich alle Teiler, von welcher Form auch immer sie waren, des letzten Terms der vorgelegten Gleichung erhalten, welche zu finden vorgelegt worden waren.
Eines Beispiels wegen, wenn vorgelegt ist, alle Teiler des letzten Terms dieser Gleichung zu finden

$$\begin{array}{llll}
x^4 - 14aaxx & + 32aac\,x & + a^4 & = 0 \\
\quad + 4ac & + 4acd & - 10aacc & \\
\quad + 2cc & - 16add & - 2accd & \\
\quad + 4dd & & + 4aadd & \\
\quad + dc & & + 4ac^3 & \\
 & & + 4a^3c & \\
 & & + dcaa & \\
 & & + 24acdd & \\
 & & + 4ccdd & \\
 & & + 4cd^3 & \\
 & & + c^4 & \\
 & & + dc^3 &
\end{array}$$

- natürlich mithilfe der folgenden Regeln, alle rationalen Gleichungen, durch welche eine bestimmte vorgelegte geteilt werden kann, mithilfe der sie enthüllenden Teiler des letzten Terms - nehme ich ihren letzten Term $= 0$ an, und betrachte einen ihrer Buchstaben also unbekannte Größe, wie zum Beispiel a, und ich erhalte diese nach selbigem geordnete Gleichung

$$\begin{array}{lllll}
a^4 + 4ca^3 & - 10ccaa & - 2ccda & + 4ccdd & = 0 \\
 & + 4dd & + 4c^3 & + 4cd^3 & \\
 & + dc & + 24cdd & + c^4 & \\
 & & & + dc^3 &
\end{array}$$

Weil ja aber der letzte Term dieser Gleichung auch mehrere Glieder hat, nehme ich ihn wiederum, wie zuvor, als $= 0$ an, und indem ich nun c als unbekannte Größe ansehe, erhalte ich daher diese Gleichung

$$c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c = 0.$$

Diese, durch c dividiert, gibt $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 = 0$, welche eine Gleichung ist, in welcher der letzte Term $4d^3$ nur *ein Glied* hat. Es ist aber bekannt, wie die Teiler dieses letzten Terms gefunden werden, welche, nachdem sie dann bekannt geworden sind, dazu genutzt werden können, dass mithilfe derselben durch die folgenden Regeln alle rationalen Gleichungen gesucht werden, die die fiktive $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 = 0$ teilen, und daher auch alle Gleichungen, die $c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c = 0$ teilen können, welche freilich der letzte Term der unmittelbar vorgehenden fiktiven Gleichung ist

$$\begin{array}{lllll} a^4 + 4ca^3 & - 10ccaa & - 2ccda & + 4ccdd & = 0 \\ & + 4dd & + 4c^3 & + 4cd^3 & \\ & + dc & + 24cdd & + c^4 & \\ & & & + dc^3 & \end{array}$$

Nachdem aber alle Teiler des letzten Terms dieser Gleichung gefunden worden sind, können erneut durch dieselben Regeln alle rationalen Gleichungen gefunden werden, die diese Gleichung teilen; nachdem diese bekannt geworden sind, ist das gefunden, was gesucht war, weil diese fiktive Gleichung der letzte Term der vorgelegten Gleichung ist.

Daher ist klar, dass allein durch die folgende 17. Regel immer alle Teiler des letzten Terms gefunden werden können: Aber, weil ja durch die vorhergehenden wie durch die folgenden Regeln oft auf den ersten Blick erkannt wird, dass solche Teiler nicht gegeben sind, wenn sie nicht gegeben sind, und die, die gegeben sind, mit wenig Aufwand gefunden werden können, werden die Regeln mit größten Ertrag angewendet werden können.

16. Regel

welche die Art lehrt, alle rationalen Gleichungen zu finden, die nur zwei Terme haben und durch welche eine bestimmte rationale und bruchfreie Gleichung, ob literal oder numeral, geteilt werden kann.

Es entstehe eine andere Gleichung nach Belieben aus zwei oder mehreren Größen oder auch aus Termen der vorgelegten Gleichung; und gemäß dieser Annahme finde man den Wert von x oder man nehme nach Belieben einen bestimmten Wert für x an. Darauf, nachdem dieser fiktive Wert von x oder der, den wir aus der fiktiven Gleichung gefunden haben, überall anstelle von x in der vorgelegten Gleichung eingesetzt worden ist: Wenn die Terme entdeckt werden sich gegenseitig aufzuheben, wird die vorgelegte Gleichung durch $x-$ diesen fiktiven Wert $= 0$ teilbar sein; wenn sich aber diese Terme nicht gegenseitig aufheben, suche man die Teiler des Aggregats all dieser Terme (dieses Aggregat, um es vom letzten Term der Gleichung zu unterscheiden, werde ich im folgenden den *fiktiven Term* nennen); und von jedem Teiler von einer Dimension subtrahiere man den fiktiven Wert von x, aber von einem Teiler von zwei Dimensionen substrahiere man das Quadrat desselben Wertes, und so weiter. Nachdem all das gemacht worden ist, wird zu sehen sein, ob ein bestimmter dieser Teiler mit den Teilern des letzten Terms der vorgelegten Gleichung übereinstimmt; wenn nämlich keiner derer mit ihnen übereinstimmt, ist das ein Anzeichen, dass die vorgelegte Gleichung durch eine andere, die zwei Terme hat, oder durch x oder xx etc. $+$ oder $-$ eine gewisse bekannte und rationale nicht teilbar ist: Wenn aber bestimmte Teiler übereinstimmen, ist es nötig, nachdem ein bestimmter Übereinstimmender $+x$ derselben Dimensionen $= 0$ gesetzt worden ist, zu ermitteln, durch welche dieser Gleichungen die vorgelegte Gleichung geteilt werden kann; wenn sie nämlich durch keine von diesen teilbar ist, wird auch die vorgelegte durch x oder xx etc. $+$ oder $-$ eine gewisse rationale und bekannte Größe nicht teilbar sein. All das wird freilich anhand eines Beispiels deutlicher werden.

Um die Teiler, wenn es welche gibt, dieser Gleichung zu finden

$$\begin{array}{l} x^3 - 21axx - bb \quad x + 20abb = 0 \\ \qquad\qquad\qquad + 20aa \end{array}$$

nehme ich $x^3 = 21aax$ oder $bbx = 20abb$ an, oder ich nehme nach Belieben eine Wert für x an, wie a oder b: Aber hier wollen wir $x^3 = 21axx$ oder $x = 21a$ annehmen. Darauf, indem man $21a$ überall anstelle von x in der vorgelegten Gleichung

$$\begin{array}{l} x^3 - 21axx - bb \quad x + 20abb = 0 \\ \qquad\qquad\qquad + 20aa \end{array}$$

einsetzt (wobei man der Kürze wegen die Terme streiche, aus denen die fiktive besteht, weil selbige, wenn sie gleich Null gesetzt werden, notwendig verschwinden) erhalte ich für das Aggregat aller Terme $-21abb + 21 \cdot 20a^3 + 20abb$ oder $-abb + 21 \cdot 20a^3$, welches Aggregat ich freilich den *fiktiven Term* nenne, dessen Teiler diese vier sind $+a$ & $-a$; $-bb + 21 \cdot 20a$ & $+bb - 21 \cdot 20aa$. Weiter, nachdem dieser fiktive Wert $21a$ von jedem der beiden ersten und dessen Quadrat von jedem der zwei folgenden abgezogen worden ist, (weil selbige ja von zwei Dimensionen sind) so wird $-20a$, $-22a$, $-bb - 21aa$, $bb - 41 \cdot 21aa$ zurück bleiben. Nachdem das gemacht worden ist, wenn man prüft, ob ein bestimmter dieser übrigen mit den Teilern des letzten Terms $+20abb$ der vorgelegten Gleichung übereinstimmt, wird man in Erfahrung bringen, dass allein $-20a$ übereinstimmt. Daher, nachdem zu $-20a$ ein x von einer Dimension hinzugefügt worden ist, weil ja $-20a$ nur von einer Dimension ist, ist bloß noch zu untersuchen, ob die vorgelegte Gleichung durch $x - 20a$ geteilt werden kann, weil, wenn es sich nicht zuträgt, sie durch x oder $xx +$ oder $-$ eine bestimmte andere und rationale Größe nicht teilbar sein wird, als wenn keine kongruenten Teiler gefunden worden wären. Aber diese Gleichung wird durch $x - 20a$ geteilt werden können, und für den Quotienten wird $xx - ax - bb = 0$ entspringen.

Hier müssen aber gewisse Dinge betrachtet werden, die ich zumindest kurz angeben werde.
1. Auf diesem Weg werden alle Gleichungen zweier Terme, durch die die vorgelegte Gleichung geteilt werden kann, mit derselben Operation gefunden.
2. Beim Bilden der neuen Gleichung, oder weil x ein bestimmter Wert zugeteilt wird, ist zu bemerken, dass er der Kürze wegen so angenommen werden kann, dass, nachdem er anstelle von x eingesetzt worden ist, daher solch ein Aggregat von Größen oder *fiktiver Term* entspringt, dessen Teiler leicht zu finden und von geringer Anzahl sind.
3. Oftmals ist es überflüssig, dass alle Teiler des letzten Terms der vorgelegten Gleichung gesucht werden, wie es im oberen Beispiel zu sehen ist, wo die möglichen Teiler, die aus den Teilern des fiktiven Terms und des angenommenen Wertes von x und xx gebildet worden sind, diese vier waren $-20a$, $-22a$, $-bb - 21aa$, $+bb - 41 \cdot 21aa$, deren letzte zwei nicht mit den Teilern des letzten Terms $20abb$ der vorgelegten Gleichung übereinstimmen können, *weil sie zwei Glieder haben, und dieser Term nur einen.* Desweiteren ist es klar, dass $22a$ kein Teiler von $20abb$ sein kann, *weil die Zahl* 22 *größer ist als die Zahl* 20; und daher muss nur $-20a$ betrachtet werden, sodass alleinig zu untersuchen ist, ob der letzte Term $20abb$ durch $-20a$ teilbar ist. In gleicher Weise, wannimmer die Teiler des letzten Terms der vorgelegten Gleichung bekannt waren, können wir auch alle Teiler des *fiktiven Terms* finden, welche uns nützlich sein können, nachdem alle, die unnütz sind, ausgelassen worden sind. Ja wir können in vielen Fällen, besonders wenn die Gleichung unteilbar ist, sogar Arbeit sparen, welche für das Suchen der Teiler so des letzten Terms der vorgelegten Gleichung wie des *fiktiven Terms* zu investieren wäre, wenn wir sie bloß miteinander vergleichen, was entsprechende Erfahrung viel deutlicher zeigt als viele Worte.
4. Wenn es sich zuträgt, dass es noch viele kongruente Teiler gibt, sodass

es immer noch zu viel Arbeit wäre, die Division durch all diese Teiler zu probieren, werden wir, indem wir eine andere Gleichung ansetzen oder x einen anderen Wert zuteilen, rückwärts vorgehen können und wie zuvor *die möglichen Teiler* (welche den einzelen Teilern dieses letzten Terms, den fiktiven Werten $-$ dem letzten von x oder xx etc. gleich sind, so wie es in der Regel gesagt worden ist) mit den schon kongruenten vergleichen und wiederum kongruente, wenn es welche gibt, finden; wenn aber keine gefunden werden, ist dies ein Anzeichen, dass die Gleichung durch x oder xx etc. $+$ oder $-$ eine bestimmte bekannte und rationale Größe nicht teilbar ist. Und wenn es immer noch zu viele waren, können in gleicher Weise erneut einige verworfen werden. Aber dies passiert in literalen Gleichungen selten.
5. Wenn die vorgelegte bruchfreie Gleichung durch eine andere rationale Gleichung teilbar ist, die nur zwei Terme hat, ist es, um diesen Teiler zu finden, nicht nötig, alle Wurzelzeichen aus der vorgelegten Gleichung zu entfernen, sondern nur die, die im letzten Term gefunden werden.

Auch diese 16. *Regel kann in zwei Teile geteilt werden, und zwar auf diese Weise:*

Man untersuche zuerst, ob die vorgelegte Gleichung durch eine andere teilbar ist, in welcher ein oder mehrere Terme fehlen, gemäß Regel 11. Wenn dies nicht der Fall ist, dann ist gemäß der schon beschriebenen 16. Regel zu untersuchen, ob sie durch $x+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms, nachdem alle übrigen Teiler zweier oder mehrerer Dimensionen weggelassen worden sind, teilbar ist.

17. Regel

welche die Art lehrt, alle rationalen Gleichungen zu finden, durch welche eine rationale und bruchfreie Gleichung, ob sie eine literale oder numerale ist, geteilt werden kann.

Eine solche Gleichung wird durch eine andere bruchfreie teilbar sein, in welcher entweder ein oder mehrere Terme fehlen, oder keiner. Deshalb ist zuerst durch Regel 10 zu untersuchen, ob sie durch eine rationale bruchfreie, in welcher eine oder mehrere Terme fehlen, geteilt werden kann; wenn es in Erfahrung gebracht wird, dass dies nicht möglich ist, wird sie durch eine Gleichung ohne fehlenden Term und freilich von einer Dimension teilbar sein, wenn die vorgelegte 3 Dimensionen hat; oder durch eine von einer oder zwei Dimensionen, wenn die vorgelegte von 4 oder 5 Dimensionen war; oder durch eine von 1, 2, 3, wenn die vorgelegte von 6 oder 7 Dimensionen war; oder

durch eine von 1, 2, 3 oder 4 Dimensionen, wenn die vorgelegte 8 oder 9 Dimensionen hat; und so weiter bis ins Unendliche.
Aber die Art zu ermitteln, ob sie durch eine einfache Gleichung oder eine von einer Dimension teilbar ist, habe ich zuvor gezeigt: Daher fehlt nur noch, wie die übrigen Teiler oder die Gleichungen von zwei, drei, etc. Dimensionen gefunden werden können.

Und es ist wichtig zu wissen, dass ich die bekannte Größe des 2. Terms, mit ihren Vorzeichen $+$ und $-$, p nenne; die des 3. Terms q; des 4. r, des 5. s, des 6. t, des 7. v: Aber den Teiler des letzten Terms, gleichermaßen mit seinen Vorzeichen, h.

Regel für Gleichungen von 4 Dimensionen

Wenn die vorgelegte Gleichung durch eine rationale Gleichung teilbar ist, die mehr als eine Dimension hat und in welcher kein Term fehlt, wird sie teilbar sein durch

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h} + h = 0.$$

Einzig ausgenommen davon ist der Fall, wenn $\frac{s}{h} = h$ und zugleich $r = hp$ ist, das heißt, $h = \pm\sqrt{s}$ und $h = \frac{r}{p}$, dann wird sie nämlich nicht durch folgende Gleichung teilbar sein:

$$xx + \left(\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}\right) x + h = 0.$$

1. Und weil die vorgelegte Gleichung bruch- und wurzelfrei ist und durch eine rationale Gleichung geteilt werden kann, folgt, dass $\frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}$ eine ganz rationale Größe sein muss. Es ist klar, dass auch s niemals $= hh$ sein kein, wenn s kein Quadrat war, und r durch p geteilt werden kann.
2. Es wird sogar genügen, auch nur jene Teiler des letzten Terms, die dessen $\surd$ nicht übersteigen, zu betrachten, natürlich nur, wenn die Gleichung eine numerale ist; aber wenn sie eine literale ist, wird es nur nötig sein die Teiler von zwei Dimensionen zu benutzen, und aus diesen immer nur einen von zwei solchen, deren Produkt den letzten Term festlegt.

Eines Beispiels wegen, wenn diese numerale Gleichung vorgelegt ist $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 = 0$, welche durch eine rationale Gleichung geteilt werden kann, und wenn in Erfahrung gebracht worden ist, dass selbige durch $x+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms und auch durch einen Gleichung von 2 Dimensionen nicht teilbar ist, in welcher ein Term fehlt, wird sie durch diese geteilt werden können $xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h = 0$.

Weil also hier gilt $p = -3$

q welche wir in diesem Beispiel nicht brauchen; daher lasse ich sie aus

$r = -30$

$s = -200$

wird daher $xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h = xx + \frac{-30+3h}{\frac{-200}{h}-h}x + h = 0$ sein. Aber die Teiler des letzten Terms, welche die Quadratwurzel nicht überseteigen sind, sind oder haben folgende Werte

$h =$	$+\,1$	oder	$-\,1$
	$+\,2$		$-\,2$
	$+\,4$		$-\,4$
	$+\,5$		$-\,5$
	$+\,8$		$-\,8$
	$+\,10$		$-\,10$

Daher, indem man $h = 1$ nimmt, wird $\frac{-30+3h}{-\frac{200}{h}-h}$ ein Bruch sein, und gleichermaßen, wenn man $h = -1, = +2, = -2, = +4, = -4$ und $= +5$ nimmt. Aber wenn man $h = -5$ nimmt, wird man -1 erhalten, und daher wird die Division durch $xx - 1x - 5 = 0$ zu versuchen sein. Weil es aber durch diese nicht möglich ist, gehe ich zu einem anderen Wert von h über, zum Beispiel $+8$. Aber weil hier die vorausgesagte Größe wiederum ein Bruch werden würde, wie wenn man $h = -8$ angenommen hätte, gehe ich über zu $h = +10$ über. Weil aber $r = hp$ wird und daher $xx + h = 0$ ist, wird uns dieser Wert gleichermaßen nichts nutzen, so dass uns allein $h = -10$ übrig bleibt. Daher erhalten wir die Gleichung $xx - 2x - 10 = 0$, durch welche die vorgelegte geteilt werden kann.
In gleicher Weise, wenn diese literale Gleichung vorgelegt ist

$$x^4 \begin{array}{c} -\ bb \\ \\ +\ 2ab \end{array} xx \begin{array}{c} +\ 4abb \\ +\ a^3 \\ \\ -\ 4b^3 \\ +\ aab \end{array} x \begin{array}{c} -\ 4b^4 \\ \\ +\ 2aabb \end{array} = 0$$

$$\text{Weil ja gilt} \quad \begin{aligned} p &= 0 \\ r &= 4abb - a^3 - 4b^3 + aab \\ s &= 2aabb - 4b^4 \end{aligned}$$

so wird

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h = xx + \frac{4abb - a^3 - 4b^3 + aab}{\frac{2aabb - 4b^4}{h} - h}x + h = 0$$

sein. Die Teiler des letzten Terms, die zwei Dimensionen haben, oder die Werte von h sind

$$\begin{array}{lcl} +\ bb, & \& & -\ 4bb + 2aa, \\ -\ bb, & & +\ 4bb - 2aa, \\ +\ 2bb, & & +\ 2bb + aa, \\ -\ 2bb, & & -\ 2bb - aa. \end{array}$$

Von diesen benötigen wir nur die 4 ersten Terme, nämlich $+bb$, $-bb$, $+2bb$, $-2bb$: Weil ja die übrigen mit diesen multipliziert den letzten Term erzeugen. Indem man aber $h = +bb$ nimmt, wird der 2. Term ein Bruch sein. Daher, wenn man zu $h = +2bb$ nimmt, wird man die Gleichung $xx \begin{array}{c} +b \\ +a \end{array} x + 2bb = 0$ erhalten. Durch diese kann die vorgelegte geteilt werden, man findet nämlich für den Quotienten diese

$$xx + \begin{array}{c} +\ a \\ -\ b \end{array} x \begin{array}{c} -\ 2bb \\ +\ aa \end{array} = 0.$$

Regel für Gleichungen von 5 Dimensionen.

Wenn die vorgelegte Gleichung von 5 Dimensionen durch eine rationale Gleichung teilbar ist, die mehr als eine Dimension hat und in welcher kein Term fehlt, wird selbige durch diese Gleichung geteilt werden können

$$xx - \left(\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \frac{1}{2}p \pm \left(\sqrt{-\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \left(\frac{1}{2}p\right)^2} - q + h + \frac{s}{h}\right)\right) x + h = 0.$$

Und weil diese Gleichung rational sein muss und keine Brüche zulässt, folgt, dass der 2. Term eine ganz rationale Größe sein muss.

Beispiel

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{llll} x^5 + 8aabxx & + 2ab^3 & x - b^5 & = 0 \\ \quad - 63a^3 & + 16a^3b & + a^4b & \\ \quad + 8abb & + 15aabb & - ab^4 & \\ \quad - b^3 & - b^4 & + a^3bb & \\ & - 4a^4 & & \end{array}$$

Nachdem bekannt geworden ist, dass diese Gleichung nicht durch eine andere von 2 oder 3 Dimensionen, in welcher ein oder mehr Terme fehlen, und auch durch $x \pm$ einen Teiler des letzten Terms geteilt werden kann, wird sie durch die obere teilbar sein, also

$$xx - \left(\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \frac{1}{2}p \pm \left(\sqrt{-\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \left(\frac{1}{2}p\right)^2} - q + h + \frac{s}{h}\right)\right) x + h = 0.$$

Die bekannten Größen sind $p = 0$

$q = 0$

r ist hier von keinem Nutzen

$s = 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$

$t = -b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb,$

und die Teiler des letzten Terms, die zwei Dimensionen haben, oder die Werte von h sind

$$\begin{aligned} h &= ab+bb, \quad \text{oder} \quad -ab-bb, \quad \text{oder} \quad bb-aa, \quad \text{oder} \quad -bb+aa \\ \text{oder} &\quad ab-bb, \quad \text{oder} \quad -ab+bb \\ \text{oder} &\quad aa+ab+bb, \quad \text{oder} \quad -aa-ab-bb \end{aligned}$$

Daher, wenn man $h = ab + bb$ annimmt, wird man:

$$xx - \left(\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \frac{1}{2}p \pm \left(\sqrt{ -\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \left(\frac{1}{2}p \right)^2 } - q + h + \frac{s}{h} \right) \right) x + h = 0.$$

als gleich

$$\begin{aligned} xx - 4ax &+ ab = 0 \\ &+ bb \end{aligned}$$

erhalten. Wenn man probiert , ob die vorgelegte durch diese geteilt werden kann, wird man finden, dass die Division möglich ist und als Quotient diese entspringt

$$\begin{aligned} x^3 + 4axx &+ 16aax - b^3 = 0. \\ -ab &\qquad + a^3 \\ -bb & \end{aligned}$$

Regel für Gleichungen von 6 Dimensionen.

Wenn die vorgelegte Gleichung von 6 Dimensionen durch eine rationale Gleichung teilbar ist, die mehr als eine Dimension hat und in der kein Term fehlt, wird sie entweder durch eine Gleichung von 2 Dimensionen oder eine von 3 Dimensionen teilbar sein. Wenn sie durch eine rationale Gleichung von 2 Dimensionen teilbar ist, wird sie durch die Gleichung $xx + yx + h = 0$ geteilt werden können, mit

$$y = \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \pm \sqrt{ \left(\frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \right)^2 + \frac{s - \frac{v}{h} + hh - qh}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}} }.$$

Wenn sie durch eine rationale Gleichung von 3 Dimensionen teilbar ist, wird sie durch die Gleichung $x^3 + yxx + zx + h = 0$ teilbar sein, mit

$$\begin{array}{lcccc} y^3 + \dfrac{-\frac{pv}{h} - 2ph}{\frac{v}{h} + h} yy + & \dfrac{pph - 2t}{\frac{v}{h} + h} y + & \dfrac{\left(-\frac{v}{h} + h\right) r \cdot (-qh + t)\, p}{\frac{v}{h} + h} & = 0 \\ \qquad +qy & \dfrac{v}{h} - h & & \end{array}$$

$$\& \quad z = \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}.$$

Weiter folgt wegen desselben Grundes wie in den vorhergehenden Regeln, dass y und z ganz rationale Größen sein müssen.

Und in diesem letzten Fall, wo die Teilung durch $x^3 + yxx + zx + h = 0$ zu probieren ist, ist es nur nötig, die Teiler des letzten Terms zu benutzen, die seine Quadratwurzel nicht übersteigen, wannimmer die Gleichung eine numerale ist; aber wenn selbige eine literale ist, genügt es Teiler von 3 Dimensionen zu benutzten, und aus diesen bloß einen von zwei solchen, deren Produkt den letzten Term ergibt, zu benutzen, nicht anders als das in der vorhergehenden Regel für die Gleichungen von 4 Dimensionen auch angemerkt worden ist. Weiter gilt das eben Gesagte auch bei allen Gleichungen von geraden Dimensionen, welche wir zu durch eine andere von halb so vielen Dimensionen zu teilen versuchen.

Bestimmung des 1. Falls

Weil $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h} = 0$ ist, das heißt, $h^3 = v$ und $h = \sqrt[3]{v}$, so wird $y = \frac{-s + q\sqrt[3]{v}}{p\sqrt[3]{v} - \frac{t}{\sqrt[3]{v}}}$ sein. Weil $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h} = 0$ ist, und zugleich $p\sqrt[3]{v} - \frac{t}{\sqrt[3]{v}} = 0$ und $-s + q\sqrt[3]{v} = 0$, das heißt, $h = \sqrt[3]{v}$, $h = \sqrt{\frac{s}{p}}$ und $h = \frac{s}{q}$, so wird gelten:

$$y^3 - pyy \begin{matrix} + \dfrac{s}{\sqrt[3]{v}} \\ - 3\sqrt[3]{v} \end{matrix}\; y \;\begin{matrix} + 2p\sqrt[3]{v} \\ - r \end{matrix} \; = 0.$$

Bestimmung des 2. Falls

Weil $\frac{v}{h} + h = 0$ ist, wird

$$yy \begin{array}{c} -\ p \\ +\ \dfrac{2t}{ph} \end{array} y - \frac{2r}{p} + q - \frac{t}{h} = 0$$

sein. Weil $p = 0$ ist und zugleich $\frac{v}{h} + h = 0$ ist, wird $y = \frac{rh}{t}$ sein. Weil $t = 0$ und $r = 0$ und zugleich $p = 0$ und $\frac{v}{h} + h = 0$ ist, wird

$$y^4 + 2qyy + 8hy \begin{array}{c} +\ 4s \\ +\ qq \end{array} = 0$$

sein. Weil $2y = p$ und $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r = 0$ ist, wird $z = \frac{t+hyy-qh}{\frac{v}{h}-h}$ sein.
Aber weil jene Bestimmungsgleichungen dieselben bleiben und zugleich $\frac{v}{h} - h = 0$ und $t + hyy - qh = 0$ ist, wird $z = \frac{t}{2\sqrt{v}} \pm \sqrt{\frac{tt}{4v} - s + p\sqrt{v}}$ sein. Schließlich ist bei allen Bestimmungsgleichungen zu beachten, dass, wenn man $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h} = 0$ und $p\sqrt[3]{v} - \frac{t}{\sqrt[3]{v}} = 0$ findet, aber $-s + \sqrt[3]{v}$ nicht zugleich $= 0$ ist, sowie wenn man $\frac{v}{h} + h = 0$, $p = 0$ und $t = 0$ findet, aber r nicht zugleich $= 0$ ist; und ebenso, wenn man $2y = p$ und $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r = 0$ und $\frac{v}{h} - h = 0$, aber nicht zugleich $t + hyy - qh = 0$ ist; und gleichermaßen in der Regel für 4 Dimensionen, wenn man $\frac{s}{h} - h = 0$ findet, daher aber nicht $r - hp = 0$ ist: Weil dann ein bestimmter angenommener Wert von h, für welchen sich das zuträgt, uns nichts nutzen kann.

Beispiele für den 1. Fall

Es sei vorgelegt zu untersuchen, ob diese Gleichung

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx + 8 = 0$$

durch eine rationale Gleichung von 2 Dimensionen geteilt werden kann, in welcher kein Term fehlt.

$$\text{Weil also hier gilt}\quad \begin{aligned} p &= -3\\ q &= 7\\ r &= -5\\ s &= 4\\ t &= 0\\ v &= 8 \end{aligned}$$

wird

$$y = \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \pm \sqrt{\left(\frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}}\right)^2 + \frac{+s - \frac{v}{h} + hh - qh}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}}}$$

gleich diesem Ausdruck sein

$$\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}} \pm \sqrt{\left(\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\right)^2 + \frac{4 - \frac{8}{h} + hh - 7h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}}.$$

Aber die Teiler des letzten Terms oder die Werte von h sind

$$\begin{aligned} &+1, \quad \text{oder} \quad -1\\ &+2, \quad \text{oder} \quad -2\\ &+4, \quad \text{oder} \quad -4\\ &+8, \quad \text{oder} \quad -8. \end{aligned}$$

Daher, wenn man zuerst $h = +1$ nimmt, wird man die Wurzel aus

$$\left(\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\right)^2 + \frac{4 - \frac{8}{h} + hh - 7h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}$$

nicht ziehen können, und daher gehe ich über zu $h = +2$, aber weil hier $h = \sqrt[3]{v}$ ist, müsste nach den oberen Bestimmungsgleichungen $y = \frac{-s+q\sqrt[3]{v}}{p\sqrt[3]{v} - \frac{t}{\sqrt[3]{v}}}$, das heißt, $= \frac{\pm 10}{-6}$ sein. Weil das ein Bruch ist, gehe ich zu $h = +4$ über, und daher erhalte ich $y = \frac{-12}{7} \pm \frac{2}{7}$, das heißt, $y = -2$ oder $= -\frac{10}{7}$. Von diesen ist natürlich nur $y = -2$ zu betrachten, und daher die Division durch

$xx + yx + h = xx - 2x + 4 = 0$ zu probieren. Aber diese wird in Erfahrung gebracht zu gelingen, und als Quotient entspringt $x^4 - 1x^3 + 1xx + 1x + 2 = 0$.

In gleicher Weise, wenn wir diese Gleichung untersuchen wollen $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 2xx + 4x + 8 = 0$: Weil ja $p = 1$, $q = 1$, $r = -2$, $s = 2$, $t = 4$ und $v = 8$ ist, findet man

$$y = \frac{1h - \frac{4}{h}}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}} \pm \sqrt{\left(\frac{1h - \frac{4}{h}}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\right)^2 + \frac{+2 - \frac{8}{h} + hh - h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}}.$$

Wenn man aber $h = +1$ nimmt, wird man die $\surd$ nicht ziehen können; deshalb gehe ich zu $h = +2$ über, und ich finde, dass $h = \sqrt[3]{v}$ und $b = \sqrt{\frac{t}{p}}$ sowie $h = \frac{s}{q}$ sein wird. Daher suche ich gemäß der besagten Bestimmungsgleichung den Wert von y durch diese Gleichung

$$\begin{array}{l} y^3 - pyy + \frac{s}{\sqrt[3]{v}}y + 2p\sqrt[3]{v} \\ \qquad\qquad - 3\sqrt[3]{v} \; - \end{array} = 0,$$

das heißt $y^3 - 1yy + 5y + 6 = 0$.

Aus dieser Gleichung wird kein rationaler Wert für y gefunden außer 2, und daher bleibt allein übrig die Division durch $xx + yx + h = xx + 2x + 2 = 0$ zu probieren. Es wird aber in Erfahrung gebracht, dass diese möglich ist, als Quotient entspringt nämlich $x^4 - 1x^3 + 1xx - 2x + 4 = 0$.

Beispiele für den 2. **Fall**

Es sei also zu untersuchen, ob diese Gleichung

$$x^6 + 1x^4 + 3x^3 + 6xx + 3x - 4 = 0$$

durch eine rationale Gleichung von 3 Dimensionen geteilt werden kann, in welcher keine Terme fehlen.

$$\text{Weil hier gilt}\quad \begin{aligned} p &= 0 \\ q &= 1 \\ r &= 3 \\ s &= 6 \\ t &= 3 \\ v &= -4, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{array}{lccc} y^3 + \dfrac{-\frac{pv}{h} - 2ph}{\frac{v}{h} + h} yy & + \dfrac{+pph - 2t}{\frac{v}{h} + h} y & + & \dfrac{\left(-\frac{v}{h} + h\right) r \cdot (-qh + t)\, p}{\frac{v}{h} + h} \\ & + \qquad qy & & \dfrac{v}{h} - h \end{array}$$

gleich

$$\begin{array}{lcc} y^3 + \dfrac{-6}{-\frac{4}{h} + h} y & + \dfrac{\left(\frac{4}{h} + h\right) \cdot 3}{-\frac{4}{h} + h} & = 0. \\ + \qquad 1y & + \quad -\dfrac{4}{h} - h & \end{array}$$

Die Teiler des letzten Terms oder die Werte von h, die zu betrachten sind, sind $+1$ oder -1 oder $+2$. Daher, indem man $h = +1$ nimmt, wird man $y^3 + 3y = 0$ erhalten. Aber weil y dieser Gleichung keinen rationalen Wert zulässt, gehe ich zu einem anderen h über, nämlich $+2$. Weil aber so $\frac{v}{h} + h = 0$ wird, und auch $p = 0$ ist, wird, entsprechend der besagten Bestimmungsgleichung, $y = \frac{rh}{t}$ sein, das heißt $y = 2$. Aber weil ja für $z = \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}$ ein Bruch gefunden wird, gehe ich zunächst zu $h = -1$ über, und daher erhalte ich $y^3 - 1y = 0$, das heißt $y = +1$ und $y = -1$. Aus diesen muss nun endlich der Wert von z gefunden werden. Deshalb, wenn man zuerst $y = +1$ nimmt, wird man daher $z = 1$ und $x^3 + yxx + zx + h = x^3 + 1xx + 1x - 1 = 0$ finden. Durch diese Gleichung kann die vorgelegte geteilt werden, denn als Quotient entspringt $x^3 - 1xx + 1x + 4 = 0$. Wenn sie aber nicht durch diese hätte geteilt werden können, wie auch nicht durch die andere, wo $y = -1$ ist, wäre die vorgelegte Gleichung auf die besagte Weise nicht teilbar gewesen, weil wir ja so alle Werte von h einer Untersuchung unterworfen hätten.

Gleichmaßen im Begriff, diese Gleichung zu untersuchen

$$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 28 = 0,$$

in welcher $p = -6$, $q = 25$, $r = -36$, $s = 3$, $t = 16$, $v = -28$ und $h = +1$ oder -1 oder $+2$ oder -2 oder $+4$ oder -4 ist, (nachdem natürlich alle übrigen Teiler weggelassen worden sind, die die Quadratwurzel des letzten Terms übersteigen) werden wir, wenn wir, wie zuvor, den Versuch mit einem Wert von h unternehmen, wenn $h = -2$ angenommen wird, diese Gleichung $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{3}y + 31 = 0$ finden, in welcher y nur einen rationalen Wert annimmt, welcher die ganze Zahl -3 ist. Durch diesen suche ich aber den Wert von z. Aber weil hier $2y = p$ und $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r = 0$ ist, kann ich ihn nicht durch diese Gleichung finden $z = \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}$, weshalb ich jenen durch diese suche $z = \frac{t + hyy - qh}{\frac{v}{h} - h}$, und ich finde $z = 3$ und

$$x^3 + yxx + zx + h = x^3 - 3xx + 3x - 2 = 0.$$

Wenn man also untersucht, ob die vorgelegte Gleichung durch diese geteilt werden kann, wird man in Erfahrung bringen, dass die Divison möglich ist, und als Quotient wird $x^3 - 3xx + 13x + 14 = 0$ entspringen. Wenn aber in diesem letzten Beispiel, wo $2y = p$ ist, nicht $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r = 0$ wäre, wäre es nötig zu einem anderen Wert von h überzugehen.
Hier ist zu bemerken, dass durch diese Regeln für die Gleichungen von 4, 5 und 6 Dimensionen nicht nur in Erfahrung gebracht werden kann, ob eine bestimmte vorgelegte durch eine andere rationale, in welcher alle Terme vorhanden sind, teilbar ist; sondern auch, ob selbige durch eine rationale teilbar ist, in welcher ein bestimmter Term fehlt. Aber weil dieselben leichter durch Regel 11 erkannt werden, will ich diese bloß bei Gleichungen, in denen keine Terme fehlen, anwenden.
2. Weil ja aber der Nutzen dieser Regel umso größer ist, je weniger Teiler der letzte Term der vorgelegten Gleichung zulässt, war es ratsam, hier die Art anzugeben, auf welcher meistens mit geringem Aufwand die vorgelegte Gleichung in eine andere transformiert werden kann, in welcher der letzte Term weniger Dimensionen hat, und welche unteilbar ist, wenn die vorgelegte unteilbar ist, aber teilbar ist, wenn die vorgelegte teilbar war, und aus ihren selbige teilenden Gleichungen leicht auch Gleichungen gefunden werden können, die die vorgelegte teilen.

Nachdem zu diesem Zweck nach Belieben ein bestimmter Wert von x angenommen worden ist und er überall anstelle von x eingesetzt worden ist, suche man alle Teiler des Aggregats aller Terme und wenn diese Teiler nicht von geringerer Anzahl waren als die Teiler des letzten Terms der vorgelegten Gleichung, nehme man wieder einen anderen Wert für x, und untersuche, ob daher ein Aggregat von weniger Teilern gefunden wird; wenn das nicht passiert, ist erneut ein anderer Wert für x anzunehmen, und das wiederhole man so lange, bis daher ein Aggregat resultiert, welches weniger Teiler hat. Nachdem dies gemacht worden ist, setze man $x = z+$ den angenommenen Wert von x, welcher ein Aggregat von weniger Teilern liefert, und man setze diesen Wert $z+$etc. überall anstelle von x ein, und man wird eine andere Gleichung erhalten, in welcher z eine unbekannte Größe und der letzte Term das gefundene besagte Aggregat von wenigen Teilern sein wird, so dass diese Gleichung eine solche sein wird, wie sie verlangt wird, natürlich unteilbar, wenn die vorgelegte unteilbar ist, aber teilbar, wenn die vorgelegte teilbar ist.

Eines Beispiels wegen sei eine Gleichung von solcher Art anstelle von dieser zu finden

$$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 = 0.$$

Man nehme $x = 1$ an, und es wird gelten

$$\begin{array}{rrcl} & x^5 & = & +1 \\ + & 2x^4 & = & +2 \\ - & 58x^3 & = & \cdots - 58 \\ - & 49xx & = & \cdots - 49 \\ - & 50\,x & = & \cdots - 50 \\ - & 600 & = & \cdots - 600 \end{array}$$

und $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 = (+3 - 757)$, das heißt, $= -754$, deren Anzahl an Teilern um vieles kleiner ist als von -600.
Daher, indem man $x = z + 1$ setzt, wird gelten:

$$
\begin{array}{rrl}
 & x^5 = & z^5 + 5z^4 + 10z^3 + \ \ 10zz + \ \ \ 5z + \ \ \ 1 \\
+ & 2x^4 = & \ \ \ \ + 2z^4 + \ \ 8z^3 + \ \ 12zz + \ \ \ 8z + \ \ \ 2 \\
- & 58x^3 = & \qquad\qquad - 58z^3 - 174zz - 174z - \ 58 \\
- & 49x^2 = & \qquad\qquad\qquad\qquad - \ \ 49zz - \ \ 98z - \ 49 \\
- & 50\ x = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \ \ 50z - \ 50 \\
- & 600 \ \ = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 600 \\
\hline
 & & \& \ z^5 + 7z^4 - 40z^3 - 201zz - 309z - 754 = 0
\end{array}
$$

Diese Gleichung, durch die vorhergehenden Regeln untersucht, wird gefunden durch $zz + 3z - 58 = 0$ teilbar zu sein, und daher, weil $x = z + 1$ ist, wird $z = x - 1$ sein. Daher, wenn man $x - 1$ anstelle von z einsetzt, wird man $zz + 3z - 58 = xx + 1x - 60 = 0$ erhalten, durch welche deshalb die vorgelegte auch teilbar sein wird.

Wenn wir aber nach der ersten Festlegung von $x = +1$ ein Aggregat erhalten hätten, welches uns nichts genützt hätte, das heißt, welches nicht wenige oder noch zu viele Teiler zuließe, hätten wir $x = -1$ setzen können; aber wenn wir auch daher das gesuchte Aggregat nicht gefunden hätten, könnten wir $x = +2$ setzen; darauf $x = -2$ und so weiter; oder wir hätten auch einige Terme $= 0$ setzen können, wenn welche gab, aus denen eine geeignete Größe für x gefunden werden könnte. Eines Beispiels wegen hätten wir in der erwähnten Gleichung die zwei ersten Terme $x^5 + 2x^4 = 0$ annehmen können, und so $x = -2$ annehmen können, indem man bloß desweiteren das Aggregat der übrigen Terme $-58x^3 - 49xx - 50x - 600$ sucht. Weiter gilt das, was wir hier über numerale Gleichungen gesagt haben, auch für literale. Wenn man eines Beispiels wegen diese literale Gleichung hat

$$
\begin{array}{l}
x^5 - 6abx + 30aaxx - 24a^3bx + 120ab^4 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 10a^4
\end{array}
$$

können wir $x = a$ oder $x = -a$ oder $x = +b$ oder $x = -b$ etc. setzen oder wir können auch einige Terme $= 0$ annehmen, wie $6abx^3 = +30aabxx$, je nachdem, ob es ratsam ist oder nicht.
2. Aber hier zeigt sich in der Tat ein riesiger Vorteil bei literalen Gleichungen: *Nicht nur, wenn dieses Aggregat einige Teiler außer der Einheit und sich selbst zulässt* (welche Teiler ich freilich bei allen literalen Gleichungen, wo alle

Glieder des letzten Terms dieselbe Anzahl an Dimensionen haben, so wie wir in diesen über sie gesprochen haben, auslasse, weil keine Teilung durch sie möglich ist), *ist es offenkundig, dass die vorgelegte Gleichung durch eine rationale, in welcher entweder alle oder nicht alle Terme vorhanden sind, und die entweder von einer oder mehreren Dimensionen sind, in keinster Weise teilbar ist, sondern zusätzlich ist es auch klar, dass die vorgelegte Gleichung niemals durch eine rationale Gleichung teilbar sein wird, deren Anzahl an Dimensionen nicht mit der Anzahl an Dimensionen eines bestimmten Teilers des letzten Terms oder der besagten Aggregats übereinstimmt.* Deshalb, wenn in einer Gleichung von 6 Dimensionen die Teiler nur von 1 und 6 Dimensionen waren, wird sie durch Gleichungen von 2, 3 und 4 Dimensionen nicht teilbar sein; und wenn es nur Teiler von 2 und 4 Dimensionen waren, wird selbige nicht durch Gleichungen von 1, 3 und 5 teilbar sein, und so für alle anderen.

Sodass wir durch diese Betrachtung nicht nur die Anzahl an Fällen reduzieren können, in welchen eine Gleichung durch eine andere teilbar ist, sondern, wenn wir untersuchen wollen, ob eine bestimmte vorgelegte rationale Gleichung durch eine andere rationale Gleichung teilbar ist, die Unteilbarkeit sehr leicht und mit geringem Aufwand, wenn die Gleichung unteilbar ist, erkannt werden kann.
Wenn nämlich eines Beispiels wegen diese Gleichung vorgelegt ist

$$\begin{aligned} x^5 - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx &+ 120ab^4 = 0 \\ &+ 10a^4 \end{aligned}$$

und man $x = a$ setzt, wird man erhalten

$$\begin{array}{rcll} x^5 &=& + \quad a^5 & \\ - \quad 6ab\,x^3 &=& \cdots & - \quad 6a^4b \\ + \ 30aabxx &=& + \ \ 30a^4b & \\ - \ \ 24a^3b \ \ x &=& \cdots & - \ \ 24a^4b \\ + \ 120ab^4 &=& + \ 120ab^4 & \\ \hline \text{und das Aggregat ist} && + \quad 11a^5 + 120ab^4 & \end{array}$$

Deren Teiler (ungeachtet der Einheit und des Aggregats selbst) sind $+a$, $-a$, $11a^4 + 120b^4$ und $-11a^4 - 120b^4$ sind, also von einer und 4 Dimensionen, sodass die vorgelegte Gleichung, wenn sie nicht durch eine rationale Gleichungen von einer Dimension teilbar war, durch überhaupt keine rationale teilbar ist. Weil ja aber hier $x = z + a$ ist, muss a zu den Teilern $+a$ und $-a$

hinzuaddiert werden, um Werte von x zu haben, weshalb nur $x - 2a = 0$ für den Teiler angenommen werden könnte. Aber durch diese ist die vorgelegte nicht teilbar, weshalb jene auch durch keine rationale Gleichung geteilt werden können wird. Wenn es sich also gemäß dieser einen Festlegung nicht so ereignet, wird es leicht sein, eine neue zu treffen, indem man $x = b$ oder $x = -a$ oder $x = -b$ etc. setzt. Und es wird sich selten ereignen, dass wir durch diese Transformation der vorgelegten Gleichung in eine andere einen Vorteil erhalten und viel an Arbeit vermieden wird.

18. Regel

welche die Art lehrt, jede literale oder numerale Gleichung zu reduzieren, deren letzter Term bruchfrei ist und die aus der Multiplikation zweier anderer, deren letzte Terme rationale Größen sind, erzeugt werden können.

Diese Regel unterscheidet sich kaum von der vorhergehenden, außer dass sie sich weiter erstreckt und durch diese auch immer Reduktionen von solcher Art von Gleichungen gefunden werden können, die aus zwei anderen, ob sie rational oder irrational sind, erzeugt werden können, nachdem lediglich das ausgenommen worden ist, dass deren letzten Terme rationale Größen sind, wohingegen sich die vorhergehende Regel auf Gleichungen bezieht, die nur aus rationalen erzeugt werden können: Und daher ist es nur nötig, dass wir dieselben Regeln benutzen, aber alle jene speziellen verwerfen, die ihren Ursprung darin hatten, dass es nötig ist, dass jene Gleichungen, aus denen die vorgelegte Gleichung gebildet werden kann, rational sind, was hier nicht verlangt ist. Anstelle eines Beispiels betrachten wir die erste

Regel für Gleichungen von 4 Dimensionen.

Wenn die vorgelegte Gleichung durch eine andere teilbar ist, die mehr als eine Dimension hat und in welcher kein Term fehlt und deren letzter Term rational ist, wird jene teilbar sein durch

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h} h + h = 0.$$

Einzig ausgenommen ist der Fall, in dem $\frac{s}{h} = h$ und zugleich $r = hp$ ist, das heißt, $h = \sqrt{s}$ und $h = \frac{r}{p}$; dann wird sie nämlich teilbar sein durch

$$xx + \left(\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}\right) x + h = 0,$$

wo klar zutage tritt, dass s niemals $= hh$ sein kann, wenn s kein Quadrat ist, und r durch p geteilt werden kann.
2. Es genügt sogar, nur jene Teiler des letzten Terms, die die Quadratwurzel von selbigem nicht übersteigen, zu betrachten etc.
Eines Beispiels wegen im Begriff diese Gleichung zu betrachten

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = = 0 \\ \qquad\qquad\quad - \quad cc \end{array}$$

weil ja $p = -2a$, $q = 2aa - cc$, $r = -2a^3$, $s = a^4$ ist, wird daher sein

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h = xx\frac{-2a^3 + 2ah}{\frac{a^4}{h} - h}x + h = 0.$$

Aber die Teiler des letzten Terms oder die Werte von h sind $+aa$ und $-aa$. Daher, indem man $b = aa$ nimmt, wird man $\frac{a^4}{h} - h = 0$ erhalten, und auch $-2a^3 + 2ah = 0$ (das heißt, $\frac{s}{h} = h$ und zugleich $r = hp$.) und daher wird die Division durch $xx + \frac{1}{2}px \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}x + h = 0$ zu versuchen sein, das heißt, durch $xx - ax + (\sqrt{aa + cc})x + aa = 0$ oder durch $xx - ax - (\sqrt{aa + cc})x + aa = 0$: Die Division durch jede der beiden gelingt. So wird sich die Sache verhalten bei der

Regel für Gleichungen von 5 Dimensionen

Wenn nämlich eine vorgelegte Gleichung von 5 Dimensionen durch eine andere teilbar ist, die mehr als eine Dimension hat und in welcher kein Term fehlt und deren letzter Term rational ist, wird sie teilbar sein durch

$$xx - \left(\frac{\frac{t}{h}}{2n} + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{-\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 - q + h + \frac{s}{h}}\right) x + h = 0.$$

Und so weiter für die übrigen Regeln, nur, wie gesagt worden ist, unter Missachtung all jener speziellen Regeln, die ihren Ursprung darin hatten, dass es nötig ist, dass jene Gleichungen, aus denen die vorgelegte Gleichung erzeugt

werden kann, dort rational waren, was hier nicht verlangt wird.
Es ist auch zu bedenken, dass diese Regel sich nicht nur auf Gleichungen bezieht, in denen weder Wurzelzeichen noch Brüche gefunden werden, (so wie die vorhergehenden nur für jene verwendet werden konnte) sondern auch auf jene, in denen sowohl Wurzelzeichen als auch Brüche aufgefunden werden, nachdem einzig das ausgenommen wurde, dass sie hier nicht im letzten Term sind, wie es zuvor gesagt worden ist.
Schließlich ist zu bemerken, dass dasselbe auch auf die folgende Weise gefunden werden kann.

Regel für Gleichungen von 5 Dimensionen.

Suche den gemeinsamen Teiler dieser zwei Gleichungen

$$\begin{array}{llll} yy + \frac{t}{hh}y & + q & = 0, \quad \& \quad yy - \frac{sh}{t}y & - (hhp - t + rh) = 0 \\ \quad - p & - h & \qquad\qquad\qquad + \frac{h^3}{t} & - \qquad \frac{t}{h} \\ & - \frac{s}{h} & & \end{array}$$

und durch ihn den Wert von y; und die vorgelegte Gleichung wird durch $xx + yx + h = 0$ teilbar sein.

Regel für Gleichungen von 6 Dimensionen.

Wenn die vorgelegte Gleichung teilbar ist durch

$$xx + yx + h = 0,$$

suche man den gemeinsamen Teiler dieser zwei Gleichungen

$$\begin{array}{llll}
hyy - \frac{v}{hh}yy & - phy & - s & = 0 \\
\quad + \frac{t}{h} & + \frac{v}{h} & & \\
 & - hh & & \\
 & + qh & &
\end{array}
\quad \& \quad
\begin{array}{llll}
y^3 - pyy & + q \; y & - r & = = 0 \\
 & - 2h & + ph & \\
 & - \frac{v}{2h} & + \frac{t}{h} &
\end{array}$$

und durch diesen den Wert von y.

Wenn die vorgelegte Gleichung teilbar ist durch $x^3 + yxx + zx + h = 0$, können mit derselben Methode, mit welcher die ersten Gleichungen gefunden worden sind, auch zwei andere gefunden werden, die eine von drei, die andere von 4 Dimensionen, und nachdem deren gemeinsamer Teiler gefunden worden ist, kann durch ihn der Wert der unbekannten Größe y gefunden werden; aber den Wert von z suche man in gleicher Weise wie zuvor. Und analog verhält es sich für die höheren Gleichungen.

Aber wenn kein gemeinsamer Teiler gefunden worden ist, verlasse ich den angenommenen Wert von h und nehme einen anderen an. Und wenn sich alle Terme der einen Gleichung gegenseitig aufheben, ist der Wert von y durch die andere zu finden.

19. Regel

welche die Art lehrt, jede bruchfreie Gleichung mit fehlendem 2. *Term zu reduzieren, welche durch eine andere geteilt werden kann, deren* 2. *Term rational ist etc.*

Zuerst untersuche ich durch Regel 11, ob die vorgelegte Gleichung durch eine andere teilbar ist, in der nicht alle Terme vorhanden sind; wenn dies nicht der Fall ist, wird sie durch eine andere teilbar sein, in welcher alle Terme vorhanden sind, welche ich auf die folgende Weise finde.

1. ermittle ich, ob sie durch $x+$ oder $-$ einen bestimmten Teiler des letzten Terms geteilt werden kann;

und wenn auch das nicht gelingt, erzeuge ich eine Gleichung derselben Form, welche ich per Multiplikation aus so vielen Teilen erzeuge, wie Teile so angenommen werden können, dass das Produkt ebenso viele Dimensionen hat wie die vorgelegte Gleichung, wobei Gleichungen von nur einer Dimension nicht mehr zu betrachten sind. Eines Beispiels wegen, wenn die vorgelegte

Gleichung 8 Dimensionen hat, betrachte ich je zwei Gleichungen, die 2 und 6 oder 3 und 5 oder 4 und 4 Dimensionen haben; oder, wenn sie 9 Dimensionen hat, zwei, die 2 und 7 oder 3 und 6 oder 4 und 5 Dimensionen hatten, aus deren Multiplikation die vorgelegte erzeugt werden könnte.
3. Danach transformiere ich die vorgelegte Gleichung in eine andere, deren unbekannte Größe die Größe des 2. Term einer dieser zwei Gleichungen bezeichnet, die, (wenn sie von verschiedener Dimension waren), weniger Dimensionen hat.
4. Zuletzt untersuche ich, ob die gefundene Gleichung durch die unbekannte Größe + oder − einen Teiler des letzten Terms teilbar ist. etc.
Wir wollen eines Beispiels wegen diese Gleichung von 6 Dimensionen annehmen

$$x^6 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0,$$

in welcher q die bekannte Größe des dritten Terms mit seinen Vorzeichen + oder − bezeichnet, r des vierten, s des fünften, t des sechsten und v des letzten Terms: Und diese nehme ich als unteilbar durch eine andere , in welcher ein oder mehrere Terme fehlen, oder auch durch $x+$ oder − einen anderen Teiler des letzten Terms an.
Zuerst untersuche ich deshalb, ob sie durch eine Gleichung von 2 Dimensionen teilbar ist, in welcher alle Terme vorhanden sind, und zwar auf diese Weise:

$$\begin{array}{llllllll}
x^4 & -yx^3 & +zxx & +kx & +l & & =0 & \\
xx & +yx & +w & & & & =0 & \\
\hline
x^6 & -yx^5 & +zx^4 & +kx^3 & +lxx & & & \\
 & +y & -yy & +yz & +yk & +ylx & & \\
 & & +w & -wy & +wz & +wk & +wl & \\
\hline
x^6 & & +qx^4 & +rx^3 & +sxx & +tx & +v & =0
\end{array}$$

Daher resultieren diese 5 Gleichungen

$$\begin{array}{ll} 1. & z - yy + w = q \\ 2. & k + yz - wy = r \\ 3. & l + yk + wz = s \\ 4. & yl + wk = t \\ 5. & wl = v \end{array}$$

Durch die 1. wird $z = q + yy - w$, wenn welcher Wert anstelle von z in den übrigen Gleichungen eingesetzt wird, wird man haben

$$\begin{array}{lll} \text{für die} & 2. & k + qy + y^3 - 2wy = 0 \\ & 3. & l + yk + qw + yyq - ww = s \\ & 4. & yl + wk = t \\ & 5. & wl = v \end{array}$$

Durch die 2. wird $k = r - qy - y^3 + 2wy$, welcher Wert anstelle von k in den übrigen Gleichungen eingesetzt gibt

$$\begin{array}{lll} \text{für die} & 3. & l + ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww = 0 \\ & 4. & yl + rw - qwy - y^3w + 2wwy = t \\ & 5. & w = v \end{array}$$

Durch die 3. wird $l = s - ry + qyy + y^4 - 3wyy - qw + ww$, welcher Wert in den übrigen Gleichungen eingesetzt gibt

$$\begin{array}{lll} \text{für die} & 4. & sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw = t \\ & 5. & sw - ryw + qyyw + y^4w - 3wwyy - qww + w^3 = v. \end{array}$$

Nachdem durch die 4. der Wert von ww gefunden worden ist (oder von der von $3ww$), setze ich selbigen anstelle von ww (oder $3ww$) in der 5. Gleichung ein, und ich erhalte eine 6. Gleichung ein, in welcher w nur eine Dimension hat, nämlich:

$$w = \frac{5y^8 + 6qy^6 - 4ry^5 + 5sy^4 + qqy^4 - 5ty^3 - rryy + qsyy.9vyy - qty + sry - tr}{14y^6 + 8qy^4 + 5ry^3 + 2qqyy - 6syy + qry - 3ty - rr}$$

Wenn dieser Wert nun in der 4. Gleichung anstelle von w eingesetzt wird, wird man für selbige haben

$$
\begin{array}{lllllllll}
y^{15} & + 4qy^{13} & - 2ry^{12} & + 6qqy^{11} & + 10ty^{10} & - 2qsy^{9} & + 12qty^{8} & - 3rty^{7} & + 10sty^{6} \\
 & & & - 2s & - 6qr & - 26v & + 6rs & - 24qv & - 30rv \\
 & & & & & + 4q^3 & - 6qqr & - 7ss & + 2qqt \\
 & & & & & & & + 2qqs & + 4qrs \\
 & & & & & & & + q^4 & + 2r^3 \\
 & & & & & & & & - 2q^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
- 12tty^{5} & + 2qsty^{4} & - 5qtty^{3} & - 6rttyy & - qqtty & - qrtt = 0 \\
+ 6qrt & - 6qrv & + 7rst & + 2r^3s & + 3stt & + t^3 \\
- 18qqv & - 6rrt & + 3rrv & & + qrst & + rrst \\
- 6qss & + 8rss & qqrt & & + 3qrrv & - r^3v \\
- 6rrs & - 2qqrt & - 4q^3v & & - 9rtv & \\
+ 2q^3s & + 2qr^3 & + qqss & & - r^3t & \\
+ 54sv & - 18tv & + 18qsv & & - rrss & \\
 & - 4s^3 & & & & \\
 & - 2qrrs & & & & \\
 & - r^4 & & & & \\
 & - 27vv & & & &
\end{array}
$$

Diese Gleichung ist aber die, die gemäß der Regel zu suchen war, nämlich die, in welcher y die bekannte Größe des zweiten Terms dieser Gleichung $xx + yx + w = 0$ bezeichnet, welche eine der zwei ist, aus welchen die vorgelegte angenommen wird gebildet zu werden, und welche weniger Dimenionen hat. Nun ist aber noch zu untersuchen, ob diese Gleichung durch $y+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms $-qrtt + t^3 + rrst - r^3v$ teilbar ist. Wenn sie nämlich teilbar ist, wird auch w bekannt sein, und die vorgelegte wird durch $xx + yx + w = 0$ geteilt werden können. Denn man findet den Wert von w durch die vierte Gleichung

$$sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw = t$$

$$
\begin{aligned}
ww = {} & \frac{4}{3}yyw + \frac{t}{3y} + \frac{-s + ry - qyy - y^4}{3}. \\
& \frac{4}{3}q \\
- {} & \frac{1}{5}r
\end{aligned}
$$

Selbige kann auch durch die 5. gefunden werden; wie auch durch die 6., wenn die 5. durch die 4. nicht teilbar ist.

Wenn nun diese Gleichung von 15 Dimensionen nicht durch $y+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms teilbar war, werden wir wiederum in gleicher Weise eine Gleichung derselben Form bilden können, indem man annimmt, dass die vorgelegte ein Produkt aus der Multiplikation zweier anderer ist, welche jeweils 3 Dimensionen haben, indem man eine Gleichung sucht, in welcher die Unbekannte Größe wieder die Größe des 2. Terms von einer der beiden Gleichungen bezeichnet. Diese steigt aber zu 20 Dimensionen an, aber wird überall von gerader Dimension sein, sodass hier dann die Teilung durch das Quadrat der unbekannten Größe $+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms zu untersuchen ist.
Genauso, wenn die vorgelegte Gleichung von 5 oder 4 Dimensionen ist und es klar ist, dass sie nicht durch eine andere Gleichung geteilt werden kann, in welcher ein oder mehrere Terme fehlen, und auch nicht durch $x+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms geteilt werden kann, wird sie durch eine Gleichung von 2 Dimensionen teilbar sein, in welcher alle Terme vorhanden sind. Deshalb werden wir aus dieser Gleichung von 5 Dimensionen

$$x^5 + qx^3 + rxx + sx + t = 0,$$

wenn wir in der vorhergehenden Operation l und $v = 0$ setzen, finden

$$3. \quad ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww = s,$$

$$\text{und} \quad 4. \quad rw - qwy - y^3w + 2wwy = t.$$

Aber durch die 3. ist der Wert von $ww = ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - s$, welcher Wert anstelle von ww in der 4. eingesetzt für die 5. geben wird:

$$w = \frac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^5 + 2sy + t}{r + 5y^3 + qy}.$$

Weiter, nachdem dieser Wert überall anstelle von w in der 3. eingesetzt worden ist, wird man erhalten

$$\begin{array}{llllllllll}
y^{20} + 3qy^8 - ry^7 + 3qqy^6 & - 2qry^5 & - 2qsy^4 & + 4sry^3 & - 4ssyy & - 4sty & - tt & = 0 \\
\qquad\qquad - 3s & + 11t & - rr & + 4qt & + 7rt & + r^3 & - rrs & \\
 & & + q^3 & - qqr & + qqs & + tqq & + tqr & \\
 & & & & - qrr & & &
\end{array}$$

Und auch diese ist die Gleichung, die zum Teilen von Gleichungen von 5 Dimensionen dient und welche gesucht wird.
Aber für Gleichungen von vier Dimensionen, wie $x^4 + qxx + ry + s = 0$, finde ich, indem ich k, l, t und $v = 0$ setze,

$$\begin{array}{lll}
 & \text{für die 2.} & qy + y^3 - 2wy = r, \\
\& & \text{für die 3.} & qw + yyw - ww = s.
\end{array}$$

Indem man nun den Wert von $w = \frac{qy+y^3-r}{2y}$ in der 3. einsetzt, wird man erhalten

$$\begin{array}{l}
y^6 + 2qy^4 + qqyy - rr = 0 \\
\qquad\qquad - 4s
\end{array}$$

Diese Gleichung wird teilbar sein durch $yy+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms, und die vorgelegte Gleichung durch $xx + yx + w = 0$ und auch durch $xx - yx + z = 0$; das heißt,

$$\begin{array}{ll}
\text{durch} & xx + yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}yy - \frac{r}{2y} = 0 \\
\& & xx - yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}yy + \frac{r}{2y} = 0.
\end{array}$$

Dort ist anzumerken, dass diese Regel, mit welcher alle reduzierbaren biquadratischen Gleichungen reduziert werden können, völlig dieselben sind wie Descartes sie auf den Seiten 79, 80 und 81 seiner *Geometria* angegeben hat. Und ich bezweifle nicht, dass er sie auf dieselbe Weise oder zumindest auf sehr ähnliche Weise gefunden hat; zumal wenn das, was er auf Seite 84 im Allgemeinen über die Reduktion von Gleichungen lehrt, mit der Methode der

Sekanten, und was er unmittelbar darauf lehrt, verglichen wird. Daher denke ich, dass es nicht einmal sehr wahrscheinlich scheint, besonders, wenn wir den schönen Zusammenhang der vorhergehenden mit den folgenden Ergebnissen betrachten, dass er es von einigen anderen Authoren, wie es einige behaupten, entnommen hat. Freilich war er für seinen herausragenden Intellekt (wie Wissenende und du und einige seiner Bekannten gewohnt sind), durch welchen er ja so großen Einfluss hat, nicht nur niemals dem Geist dermaßen nachsichtig, sondern auch bietet dieser kleine Traktat so verschiedene und mit größter Genialität gefundene Beispiele von tiefen und bewundernswerten Kenntnissen dar, und solche, welche in Bezug auf die Werke der Antiken sogar allgemeiner, nützlich und vom Üblichen so weit entfernt sind, dass niemand, der jenes verstanden hat und die Schriften von selbigen mit den Schriften von diesem verglichen hat, jemals zufällig auf diese Erkenntnisse stoßen kann. So wie niemand fälschlicherweise denkt, dass das strahlende Licht der Sonne von pulsierenden Sternen stammt. Und dennoch will ich hier den Alten nichts absprechen, wenn ich sie mit pulsierenden Sternen vergleiche; denn ich glaube, dass Sterne gegeben sind, die für sich betrachtet helleres und glänzendes Licht als die Sonne haben, obwohl dies für uns, die wir auf der Erde leben, nicht erkennbar ist. Denn von all jenen sind für mich besonders Archimedes und Diophantus, und viele andere berühmte Männer, die im letzten und in unserem Jahrhundert gelebt haben, gewiss von großem Namen und genießen meine größte Wertschätzung, und ich sehe sie sehr gerne aufgrund ihrer Werke und deren Verdienst für die Nachwelt als unsterblich an. Aber dass nach jenen mehr Erkenntnisse zutage gefördert werden, würden sie, wenn sie noch einmal leben würden, am Beispiel von Descartes nicht nur anerkennen, sondern würden sich auch bemühen seine Fortschritte noch zu erweitern, und würden andere anhalten eher seine als ihre Erkenntnisse zu benutzen: Weil nicht nur angenehmer und sicherer im Licht der Sonne gelebt wird, und durch seine Werke zu viel mehr neuen Erkenntnissen gelangt wird und sie um vieles glänzender und sorgfältiger als das Licht jener Sterne ins Auge fallen. Um aber die ganze Wahrheit nicht durch all die Worte zu verbergen, und das dir gegenüber, der ich jenen unvergleichlichen Mann, nicht nur aus seinen Schriften, sondern auch besonders aus enger Freundschaft, welche dir mit ihm seit vielen Jahren vergönnt ist, genau kenne, und welchen du inzwischen wiederholt mit größtem Erstaunen bewundert hast, weil du gesehen hast, dass er sehr schwere Fragen in der Mathematik aus dem Stehgreif mit sehr großer Schnelligkeit auflöst, auch wenn sie für ihn nicht schwerer als die leichtesten von allen waren, die nichtsdestoweniger von den herausragendsten

Mathematikern zur damaligen Zeit entweder gar nicht oder nur mit größter Umständlichkeit gefunden werden konnten. Und dass es dir missfällt, (wie du irgendwann selbst sehr ehrlich zugegeben hast), dass du nicht alles, was irgendwann einmal aus seinem Munde kam, sorgfältig auf Papier festgehalten hast, ist mir ein hinreichend sicheres Zeugnis, woher ich sicher bin, dass für dich, wie für mich, es nicht einmal wahrscheinlich erscheinen kann, dass jener sich diese Regeln zur Reduktion eher aus den Schriften anderer angeeignet hat, als dass er sie aus eigenen Fundamenten, jenen fruchtbarsten Keimen aller Wissenschaft, gefunden und entdeckt hat. Aber nun genug davon.

Ich werde nun zur Regel zurückkehren und werde nur kurz andeuten, dass sich aus der hier durchgeführten Operation eine allgemeine Methode aufzeigt, geordnet alle unbekannten Größen oder alle, die als unbekannt angesehen werden, zu eliminieren, bei denen dies freilich möglich ist. Das ist meiner Meinung nach von großem Nutzen, weil ich entdeckt habe, dass oftmals schwierigere Fragen, indem man nur eine unbekannte Größe annimmt, entweder gar nicht aufgelöst werden können oder nur mit größerer Mühe oder wir, um sie aufzulösen, gezwungen sind andere Wege zu gehen als bisher üblich; es ist bekannt, dass dies klar bei Descartes auf Seite 4 zu finden ist und auch in diveresen anderen Quellen steht, wovon ich nichtsdestoweniger vor nicht allzu langer Zeit in Erfahrung gebracht habe, dass es von einem herausragenden Mathematiker infrage gestellt wird, dessen Begrüdung dafür ich hier präsentiere, weil er in Schriften von anderen mehr als in der von diesem bewandert war. Ich sage aber, dass durch diese Regel all die Größen elimininiert werden können, bei denen es freilich möglich ist: Denn nicht immer ist es bei allen möglich, und nicht einmal, nachdem eine oder zwei oder etc. ausgenommen worden sind. Denn wenn die Frage kein Theorem ist, können nicht alle eliminiert werden und wenn sie bestimmt ist, können alle bis auf eine eliminiert werden; wenn aber eine Bedingung fehlt, dass sie bestimmt ist, können alle bis auf zwei bestimmt werden und so weiter wie bekannt. Und auch nicht, was ich ohne böse Absicht bemerke, kann immer durch eine beliebige Gleichung eine unbekannte Größe eliminiert werden. Eines Beispiels wegen kann in diesen zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x^3 - 3zxx + {} & bbx - zzb = 0 \\ + {} & bz \quad - zbb \\ + {} & 2zz \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
x^3 - 4zxx + {} & zbx - 2zzb = 0 \\
+ 4zz {} & - 2zbb \\
+ {} & bb
\end{aligned}
$$

in welchen x und z die unbekannten Größen bezeichnen, x oder z durch keine der beiden aus der anderen eliminiert werden. Das, wo es passiert, ist ein Anzeichen, dass das Problem, aus welchem diese zwei Gleichungen abgeleitet worden sind, nicht bestimmt ist, und in ihm eine Bedingung fehlt, damit es völlig bestimmt ist. Aber nicht selten ist es möglich, beim Auflösen eines bestimmten Problems verschiedene Gleichungen zu finden, die ein und dieselbe unbekannte Größe haben, und das mit mit großem Gewinn. Aber dazu mehr an anderer Stelle.

Weiter möchte ich hier nämlich kurz hinzufügen, wie ich dieselben Regeln mit noch einer anderen Methode finde.

Es sei, wie zuvor, diese Gleichung vorgelegt

$$x^6 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0,$$

und man ermittle, ob sie durch eine Gleichung von zwei Dimensionen geteilt werden kann, welcher kein Term fehlt; man setze an, dass diese Gleichung $xx + yx + w = 0$ ist. Wenn sie also durch diese teilbar ist, wird $xx = -yx - w$ sein, nach Einsetzen welches Wertes von xx überall anstelle von xx in der Gleichung, wird eine Gleichung resultieren, in welcher x nur eine Dimension haben wird, nämlich

$$\begin{array}{llll}
- \ 3wwyx & - \ \ w^3 & = 0 \\
- \ \ y^5 & - \ \ wy^4 & \\
+ \ 4wy^3 & + \ 3wwyy & \\
- \ \ qy^3 & + \ \ qww & \\
+ \ 2qwy & + \ \ rwy & \\
- \ \ rw & - \ \ sw & \\
+ \ \ yyr & - \ \ qwyy & \\
- \ \ sy & + \ \ v & \\
+ \ \ t & &
\end{array}$$

Darauf setze ich die einzelnen Terme $= 0$, sodass man dann diese zwei Gleichungen hat

$$-3wwy - y^5 \quad \text{etc.} = 0 \quad \& \quad -w^3 - wy^4 \quad \text{etc.} = 0$$

dieselben wie die vorhergehende 4. und 5., sodass, nachdem w in gleicher Weise wie dort eliminiert worden ist, man schließlich dieselbe Gleichung erhält, nämlich

$$y^{15} + 4qy^{13} \quad \text{etc.} = 0.$$

In gleicher Weise verhält sich die Sache bei den übrigen.

Es ist aber jenes anzumerken, dass diese Festlegung $xx - yx - w = 0$ oder $xx = yx + w$ die Operation ein wenig leichter macht, weil es bei der Substitution des Wertes von xx nicht nötig ist die Vorzeichen zu ändern, was einem gemäß der ersten Festlegung $xx + yx + w = 0$ nicht möglich ist: Deshalb ist diese neue eher auszuwählen als die vorherige. Und dass ich diese nicht ausgewählt habe, kommt daher, weil ich aufzeigen möchte, dass dasselbe Ergebnis der beiden Methoden besser deutlich wird. In gleicher Weise, wenn die vorhergehende Gleichung zu untersuchen wäre, ob sie durch eine Gleichung von drei Dimensionen geteilt werden kann, in welcher kein Term fehlt, hätte ich jene $x^3 = yxx + wx + z$ gesetzt, aber nicht $x^3 + yxx + wx + z = 0$, so wie ich es getan hätte, wenn ich der anderen Methode folgen würde.
Es ist in der Tat überflüssig zu sagen, dass diese vorhergehenden Regeln für Gleichungen von 6, 5 und 4 Dimensionen, (obwohl jene nur als Beispiel einer allgemeinen Regel angeführt worden sind) sich auf alle Fälle erstrecken: Denn

weil q die bekannte Größe des dritten Terms der vorgelegten Gleichung mit entsprechenden Vorzeichen $+$ und $-$ bezeichnet, ist es offenkundig, dass in den Regeln der Wert von q nur anstelle von q einzusetzen ist; oder wenn zufällig dieser dritte Term in der Gleichung fehlt, dass alle mit q multiplizierten Größen, weil sie auch $= 0$ sind, zu streichen sind. So verhält sich die Sache auch bei r, s und t. Eines Beispiels wegen, wenn diese Gleichung von 5 Dimensionen $x^5 + 6xx - 25x - 39 = 0$ durch eine rationale von zwei Dimensionen teilbar ist, in welcher kein Term fehlt, ist es, weil in dieser Gleichung $q = 0$, $r = 6$, $s = -25$, $t = -39$ ist, nötig, anstelle von dieser $y^{20} + 3qy^8 - ry^7 +$ etc. diese zu schreiben $y^{20} - 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621 = 0$, durch welche $y = -1$ gefunden wird, und daher $w = \frac{-2ryy+2qy^3+\text{etc.}}{r+5y^3+qy} = -3$ und für $yy + yx + w = 0$ diese $xx - 1x - 3 = 0$, durch welche die vorgelegte teilbar sein wird. Und so in allen anderen Fällen. Sodass daher klar ist, so wie auch in der 17. und allen anderen Regeln, wie jeder Fall von Gleichungen gleicher Dimension, ob bestimmte Terme fehlen oder nicht, oder in denen sie schließlich nur mit den Zeichen $+$ und $-$ behaftet sind, in ein und derselben Regel erfasst werden können, sodass unzählige Fälle von solcher Art zu einem zusammengefasst werden können und viel Arbeit gespart werden kann. Das zeigen mehr als genug die Regel von Gleichungen von 4 Dimensionen verglichen mit allen Fällen, welche andere ausgearbeitet haben, und die immense Arbeit, welche jenen diese Aufgabe bereitet hat; besonders wenn sie in gleicher Weise alle Fälle von Gleichungen von 5 und 6 Dimensionen beschreiben wollten.

Schließlich ist zu bemerken, wenn ich sage, dass zuerst zu untersuchen ist, ob die vorgelegte Gleichung durch eine andere geteilt werden kann, in welcher nicht alle Terme vorhanden sind, dass jener Anweisung nicht streng zu folgen ist; denn es ist nicht notwendig, aber meistens ein kürzerer Weg, um die vorgelegte Gleichung zu reduzieren.

20. Regel

welche die Art lehrt, jede rationale Gleichung von 4 *Dimensionen, welche bruchfrei ist, auf eine andere von drei zu reduzieren, während aber der* 2. *Term, wenn er vorhanden war, vorhanden bleibt, und diese neue Gleichung wiederum, wenn es möglich ist, auf eine von weniger Dimensionen zu reduzieren.*

Nachdem ermittelt worden ist, dass die vorgelegte Gleichung nicht durch eine andere teilbar ist, die bloß zwei Terme hat, ist der Wert dieser Gleichung zu finden

$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp = 0 \\ \qquad\quad + \ pr + 4qs \\ \qquad\qquad\quad - \ rr \end{array}$$

wo p die bekannte Größe des 2. Terms mit seinem Vorzeichen $+$ oder $-$ bezeichnet; q des dritten; r des vierten; s des fünften. Nachdem aber der Wert von y gefunden worden ist, wird die vorgelegte Gleichung mithilfe derselben in die zwei folgenden geteilt werden können, welche je nur zwei Dimensionen haben, nämlich in

$$\begin{array}{rl} & xx + \frac{1}{2}px + \left(\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}\right)x + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} = 0 \\ \& & xx + \frac{1}{2}px - \left(\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}\right)x + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} = 0 \end{array}$$

Wenn aber der Wert von y nicht gleich einem der Teiler des letzten Terms $-spp + 4qs - rr$ ist, wird die vorgelegte Gleichung nicht weiter als bis zu drei Dimensionen reduziert werden können.
Eines Beispiels wegen, wenn wir die Gleichung $x^4 - 2x^3 - 2xx - 2x + 1 = 0$ reduzieren wollen, welche durch eine Gleichung, die nur zwei Terme hat, nicht teilbar ist, finde ich

$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp = y^3 + 2yy - 16 = 0 \\ \qquad\quad + \ pr + 4qs \\ \qquad\qquad\quad - \ rr \end{array}$$

(denn $p = -2$, $q = -2$, $r = -2$, $s = 1$), welche durch $y - 2 = 0$ geteilt werden kann, sodass man anstelle dieser zwei Gleichungen diese zwei hat

$$\begin{array}{llll} xx - 1x & + 1 = 0, & \& \quad xx - 1x & + 1 = 0 \\ \quad + \sqrt{5} & & \qquad\quad - \sqrt{5} & \end{array}$$

In gleicher Weise, wenn man die Gleichung $x^4 - 12x - 5 = 0$ hat, erhalte ich $y^3 + 20y - 144 = 0$ für

$$\begin{array}{rl} y^3 - qyy - 4sy - spp = 0 \\ + \ \ pr + \ 4qs \\ - \ \ rr \end{array}$$

(denn $p = 0$, $q = 0$, $r = -12$, $s = -5$), welche teilbar ist durch $y - 4 = 0$, sodass man anstelle der zwei Gleichung diese zwei hat

$$\begin{aligned} & xx + 2x + 5 = 0 \\ \& \quad & xx - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Gleichermaßen, wenn diese literale Gleichung vorgelegt ist

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad - \quad cc \end{array}$$

wird $p = -2a$, $q = 2aa - cc$, $r = -2a^3$, $s = a^4$ sein, und daher wird anstelle der Gleichung

$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp = 0 \\ \qquad\quad + \ \ pr + \ 4qs \\ \qquad\qquad\quad - \ \ rr \end{array} \quad \text{zu schreiben sein} \quad \begin{array}{l} y^3 - 2aayy - 4a^4cc = 0 \\ \qquad\qquad + \quad cc \end{array}$$

welche durch $y - 2aa = 0$ geteilt werden kann, sodass man anstelle der zwei Gleichungen diese zwei hat

$$\begin{aligned} & xx - ax + x\sqrt{aa + cc} + aa = 0 \\ \& \quad & xx - ax - x\sqrt{aa + cc} + aa = 0 \end{aligned}$$

Wenn aber diese Gleichung durch $y+$ oder $-$ einen Teiler des letzten Terms nicht teilbar gewesen wären, hätten auch die vorgelegten Gleichungen nicht weiter als bis zu 3 reduziert werden können.

21. Regel

Bisher bezogen sich die Regeln, die ich angegeben habe, auf Gleichungen, in denen nur eine unbekannte Größe, welche ich x genannt habe, gefunden wurde, um meine Ideen klarer auszudrücken. Nun werde ich noch in Worten hinzufügen: *Dass in der vorgelegten Gleichung bezüglich der Reduktion jede beliebige Größe als unbekannte Größe und umgekehrt jede beliebige Unbekannte als bekannte Größe betrachtet werden kann; und dass es oftmals eine Abkürzung ist, die Unbekannte als bekannt und eine von den bekannten als Unbekannte zu betrachten und so die Reduktion zu finden.* Denn zuerst kann in allen Gleichungen, die aus zwei rationalen entspringen können, gleichermaßen durch eine beliebige bekannte Größe, indem man sie als Unbekannte betrachet, wie durch die unbekannte die Reduktion gefunden werden und das oftmals sehr viel schneller, wenn sie aus lediglich irrationalen gebildet werden können. Darauf ist, dass dies oft eine Abkürzung ist, daher klar, weil selten alle Buchstaben dieselbe Anzahl an Dimensionen haben, und daher, wenn man einen von den bekannten als Unbekannte ansieht, wird sich auch oft eine andere Gleichung ergeben, die von weniger Dimensionen ist als die vorgelegte und von noch weniger, wenn man auch aus den bekannten Größen selbst, welche ebenso selten dieselbe Anzahl an Dimensionen haben, eine Auswahl trifft; oder die Reduktion wird auf auf diese oder jene Weise zumindest leichter.

Indem man also alle ohne Unterschied als bekannt ansieht, wird es einem frei stehen, aus jenen eine zu wählen und als Unbekannte anzusehen, welche um die Reduktion am leichtesten durchzuführen (durch die vorgehenden Regeln) als am besten geeignet eingeschätzt wird. Und dies ist von allen Regeln zur Reduktion, die ich angegeben habe, die letzte.

Und durch sie werden nicht nur die Reduktionen der letzten Gleichungen, welche alle Bedingungen des vorgelegten Problems einschließen, mithilfe der oben erläuterten Regeln oft sehr schnell gefunden, sondern auch, bevor man zur letzten gelangt, kann man viele Reduktionen vermeiden und die oft einfachsten Gleichungen haben. Und es wäre freilich der Mühe wert, diese Sache in einigen Beispielen zu verdeutlichen, aber damit ich dich und auch mich nicht länger damit aufhalte, möchte ich nur das ein oder andere Beispiel hinzufügen.

Wie du jede rationale Gleichung reduzieren kannst, die durch eine andere rationale, wobei die Teiler des letzten Terms nicht bekannt sind, geteilt werden kann, während auch, wenn es beliebt, jeder Bruch vorhanden bleibt, welcher in jener gefunden wird; natürlich, wenn in jener Gleichung ein bestimmter Buchstabe, ob bekannt oder unbekannt, gefunden wird, nach welchem geordnet die Gleichung nicht mehr als vier Dimensionen hat; oder in welcher ein bestimmter Buchstabe gefunden wird, der nicht mehr als 1 *oder* 1 *und* 2 *oder* 1, 2 *und* 3 *oder* 1, 2, 3 *und* 4 *Dimensionen hat, oder* *auch mehr, aber nur solche, die aus diesen abgeleitet werden können: Das wird immer aus der Untersuchung des Wertes dieses Buchstabens, der entweder bekannt oder als unbekannt betrachtet wird, bekannt, wovon nur ein einziger Fall ausgenommen ist, welchen ich später angeben werde.*

1. *Beispiel*, in welchem der Buchstabe b überall nur eine Dimension hat.

Es sei also diese Gleichung vorgelegt:

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 = 0 \\ \quad + b \quad\;\; - ab \qquad\qquad + ba^3 \end{array}$$

$$\text{Also} \quad \overline{\underline{bx^3 - abxx + ba^3 = -x^4 + 2ax^3 - aaxx - ax^3 + a^4}}$$

$$\begin{array}{llll} \text{man teile durch} & x^3 - axx + a^3 & \text{es wird} & \underline{b = \; - x + a} \\ & & \text{und} & x - \quad a + b = 0 \end{array}$$

Eine Gleichung, die durch die vorgelegte geteilt werden kann.

2. *Beispiel.*

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{l} x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 = 0 \\ \quad - 2a \qquad + 70ab \; - 60aab \end{array}$$

$$\text{Also} \quad \overline{\underline{-20bxx + 70abx - 60aab = -x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}}$$

$$\text{man teile durch} \quad -20xx + 70ax - 60aa \quad \text{es wird} \quad b = \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}.$$

Aber der größte gemeinsame Teiler dieser, durch die zuvor beschriebene Methode, ist $x - 2a$, wenn der Bruch mit welchem gekürzt wird,

$$\text{wird gelten} \quad b = \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a} \quad \text{oder} \quad \frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{array}{l} xx - 20bx + 30ab = 0 \\ \qquad\qquad\quad + 60aa \end{array}$$

Sodass die vorgelegte Gleichung in diese und die vorhergehenden $x - 2a = 0$ geteilt ist.

3. *Beispiel*, in welchem die Größe c nur 1 und 2 Dimensionen hat.

Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$\begin{array}{l} x^4 + 8acxx - 4aacx + 12aacc = 0 \\ \quad - aa \end{array}$$

$$\text{Also} \quad \begin{array}{rl} \hline 12aacc = & -\ 8acxx - x^4 \\ & +\ 4aaxc + aaxx \\ \hline \end{array}$$

man teile durch $12aa$, es ist

$$cc = \left(\frac{4ax - 8xx}{12a}\right) x + \frac{aaxx - x^4}{12aa}$$

Daher wird nach Ziehen der Wurzel gefunden werden

$$\begin{array}{rll} c = \dfrac{ax - xx}{2a}, & \text{das heißt,} & xx - ax + 2ac = 0 \\ \text{oder} \quad c = \dfrac{-ax - xx}{6a}, & \text{das heißt,} & xx + ax + 6ac = 0 \end{array}$$

sodass die vorgelegte Gleichung in diese zwei geteilt worden ist. Weil ja aber in ihr a auch nur 1 und 2 Dimensionen hat, hätte dasselbe auch gefunden werden können, indem man den Wert von a sucht.
Dort kann angemerkt werden, dass, um die Wurzeln einer Gleichung zu finden, in welcher der Buchstabe, dessen Wert gesucht wird, nicht mehr Dimensionen als 1 und 2 oder 2 und 4 oder 3 und 6 etc. hat, es nicht notwendig ist zu wissen, von welcher der folgenden Formen sie ist

$$\begin{array}{l} xx - ax + bc = 0 \\ xx + ax + bc = 0 \\ xx + ax - bc = 0 \\ xx - ax - bc = 0 \end{array}$$

Und nachdem nun $xx + px + q = 0$ gesetzt worden ist und wenn px für den 2. Term und q für den letzten Term gesetzt wird, wird immer $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} = 0$.

Weiter, weil ja alle Gleichungen von vier Dimensionen zu Gleichungen von drei Dimensionen reduziert werden können, und in allen Gleichungen der zweite Term eliminiert werden kann, so ist bloß noch zu zeigen, auf welche Weise die Teiler einer Gleichung gefunden werden können, in welcher die unbekannte Größe, oder ein anderer bestimmter Buchstabe, der als Unbekannte betrachtet wird, nur 1 und 3 Dimensionen hat. Für dieses Ziel sei die Gleichung $x^3 = qx + r$ vorgelegt. In dieser bezeichne x eine Größe, deren Wert gesucht wird; q und r aber die Größen mit ihren Vorzeichen, wie sie in der Gleichung gefunden werden.
Es sei also $x = y + z$. Und es wird $x^3 = y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 = qx + r$ sein. Aus dieser Gleichung mögen aber nun zwei andere entsehen, indem man festlegt

$$3zyy + 3zzy = qx \quad \& \quad y^3 + z^3 = r \quad \text{oder} \quad y^3 = r - z^3$$

Man teile die erste Gleichung durch $y + z$, und es wird

$$3zy = \quad q$$

$$y = \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 = \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} = \qquad r - z^3$$

$$z^3 = \frac{1}{2}r \quad \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$$

$$\& \qquad y^3 = \frac{1}{2} \quad \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3} \quad \text{oder} \quad y^3 = r - z^3$$

$$\text{oder} \quad y = \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}r \pm \sqrt{-\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}, \quad \text{weil gilt} \quad y = \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$\& \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$$

weil $x = z + y$ ist

$$\text{oder} \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}$$

Weil ja aber im ersten Term des ersten Wertes von x das Zeichen $\pm$ gefunden wird, und im zweiten das umgekehrte $\mp$ und die damit verknüpften Größen vollkommen dieselben sind und weil ja, um den Wert von x zu erhalten, jene zwei Terme addiert werden müssen, wird man sie auch so bestimmen können, indem man für das eine $+$ und für das andere $-$ setzt, sodass man hat

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$$

$$\text{oder} \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}$$

Daher, indem man gemäß dieser Regel den Wert der Größe x sucht, wird es mit seiner Hilfe möglich sein die Gleichung, wenn sie reduzibel ist, in zwei rationale zu teilen: Weil ja dann $\sqrt[3]{}$ aus $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{2}rr - \frac{1}{27}q^3}$ gezogen werden kann, ausgenommen dann, wenn, nachdem der Größe q das Zeichen $+$ zugeschrieben worden ist, $\frac{1}{4}rr$ kleiner ist als $\frac{1}{27}q^3$.
Hier scheint es noch ein andere Schwierigkeit beim Ziehen der Kubik- und der Quadratwurzel zu geben; aber weil $\sqrt[3]{}$ aus einem numeralen Binom mithilfe der Regel von Seite 389 gezogen werden kann, wird mithilfe derselben auch die Wurzel aus einem literalen Binom gezogen werden können, weil sich für die Buchstaben beliebige Zahlen annehmen lassen.
Aber obwohl es sich beim Reduzieren von Gleichungen dieses vierten Beispiels oft zuträgt, dass das Gesuchte durch eine der anderen Regeln leichter gefunden wird, wird dennoch indes diese Regel, besonders bei numeralen Gleichungen, wo es viele Teiler des letzten Terms gibt oder sie schwer zu finden sind, mit Ertrag benutzt werden können.
Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, werde ich die allgemeine

Regel leichter formulieren können, welche die folgende ist:
Wenn in der vorgelegten Gleichung, die in zwei andere rationale teilbar ist, der Wert der unbekannten Größe oder einer anderen, die als unbekannt betrachtet wird, gesucht wird, werden wir selbige entweder teilen (so wie im 1. Beispiel) oder den daher entspringenden Bruch mit einem gemeinsamen Teiler kürzen können (so wie im 2. Beispiel) oder schließlich die Quadratwurzel (so wie im 3. Beispiel) oder die Kubikwurzel ziehen können, einzig ausgenommen, wie bereits gesagt, in dem einen Fall, in welchem q eine mit dem Zeichen $+$ behaftete Größe bezeichnet und $\frac{1}{4}rr$ kleiner als $\frac{1}{27}q^3$ ist.
Schließlich ist hier zu bemerken, dass diese Regel beim Auflösen von Gleichungen von drei und vier Dimensionen dieselbe ist wie die von Cardano, deren Entdeckung er Scipione del Ferro zuschreibt, so dass aus der oberen Rechnung offensichtlich ist, dass die Regel, obwohl jener Author sie zufällig aus einem anderen Prinzip gefunden hat, dennoch auch auf diese Weise gefunden werden kann. Dass diese aber dieselbe ist, ist auch daher ersichtlich, wenn wir aus den einzelnen Gleichung diese vier machen: Indem wir nämlich festlegen, dass die Größen q und r das Vorzeichen $+$ haben, werden wir, während $x^3 = +qx + r$ ist, erhalten

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$$

Wenn q eine Größe mit dem Zeichen $+$ bezeichnet, aber r eine Größe mit dem Zeichen $-$, werden wir, während $x^3 = +qx - r$ ist (indem nur in der Regel die Vorzeichen geändert werden, welche r, welches ungerade Dimensionen hat, vorangestellt werden), erhalten

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$$

Wenn q eine Größe mit dem Vorzeichen $-$ und r eine mit dem Vorzeichen $+$ bezeichnet, werden wir, während $x^3 = -qx + r$ ist, (indem die Vorzeichen ändert, die q, welches ungerade Dimensionen hat, vorangestellt sind) erhalten

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}.$$

Schließlich, wenn q und r das Vorzeichen $-$ haben, werden wir, während $x^3 = -qx - r$ ist, (indem man die Vorzeichen ändert wie oben) erhalten

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$$

Und bemerke, dass, indem man in der gleichen Weise vorgeht, ähnliche Regeln für die höheren Gleichungen gefunden werden können.
2. Wenn diese Methode Gleichungen zu reduzieren, in denen die unbekannte Größe oder die, die als unbekannte Größe betrachtet wird, von drei oder vier Dimensionen ist, irgendwann einmal ein wenig länger wird, dann ist es besser, anstatt ihrer die zwanzigste Regel zu verwenden, durch welche alle Fälle von drei oder vier Dimensionen, ohne Ausnahme, reduziert werden können; oder sogar Regel 17, wo du nicht durch Gleichungen von vier Dimensionen eingeschränkt bist, sondern alle rationalen, die durch eine bestimmte andere rationale Gleichung geteilt werden können, reduzieren kannst, und daher auch jede vorgelegte Gleichung, die durch eine bestimmte rationale teilbar ist, wenn nur ein beliebiger Buchstabe als Unbekannte und die übrigen alle als bekannt angenommen werden.

3. Oft kann aber die Reduktion von Gleichungen, die nur durch irrationale reduziert werden können, hinreichend schnell gefunden werden. Eines Beispiels wegen, wenn man diese Gleichung hat,

$$\begin{array}{rl} & x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0 \\ & \qquad\qquad - cc \\ \hline \text{oder} & x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = ccxx \end{array}$$

addiere man auf beiden seinen eine mit xx multiplizierte Größe, (weil man von der einen Seite cc mal xx hat) natürlich eine solche, dass die $\sqrt{}$ aus der anderen Seite die Quadaraturzel gezogen werden kann; weil man durch Extraktion sofort finden wird, dass die Wurzel $+aaxx$ ist, wird man, nachdem auf beiden Seiten $+aaxx$ addiert und die Qudaratwurzel gezogen worden ist, daher finden

$$xx - ax + aa = x\sqrt{aa + cc}$$

und daher wird die vorgelegte Gleichung aus der Multiplikation der zwei folgenden Gleichungen resultieren können

$$\begin{aligned} xx - ax \quad & + aa = 0 \\ - \sqrt{aa + cc} & \\ xx - ax \quad & + aa = 0 \\ + \sqrt{aa + cc} & \end{aligned}$$

4. Auch gewisse andere Regeln haben einen großen Nutzen, so bei der Reduktion einer Gleichung, die durch rationale, wie bei einer, die nur durch irrationale Größen reduziert werden können. Eines Beispiels wegen werden durch Regel 11 alle Gleichungen reduziert werden können, in der einen von beiden von welchen ein oder mehrere Terme fehlen, wenn die Gleichung gemäß der unbekannten Größe betrachtet wird, aber auch wenn nur ein bestimmter anderer Buchstabe, ob bekannt oder unbekannt, gefunden wird, der als unbekannt betrachtet wird, und die Gleichung nach jenem geordnet eine solche wird, dass sie aus zwei anderen erzeugt werden kann, in der einen von beiden von welchen ein oder mehrere Terme fehlen. Obwohl beispielsweise die folgende Gleichung von 6 Dimensionen

$$\begin{array}{rl} & x^3 - 2axx + 3abx + 6a^3 \quad = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + 6abb \\ \text{mal} & x^3 + 2axx + 4aax - 4a^3 \quad = 0 \\ & \qquad\qquad + 2ab \quad - 8b^3 \\ \hline \text{Produkt} & x^6 + \text{etc.} \end{array}$$

nicht aus zwei anderen erzeugt werden kann, in der einen der beiden von welchen ein oder mehrere Terme fehlen, wenn natürlich x als unbekannte Größe betrachtet wird, wird sie dennoch aus zwei solchen erzeugt werden können, wenn a oder b als unbekannte Größe betrachtet werden, wie aus den Gleichungem, aus denen sie erzeugt worden ist, klar ist; und daher wird jene vorgelegte Gleichung durch die 11. Regel reduziert werden können.

Hier werde ich daher also die Erläuterung dieser Regel beenden und mich im folgenden noch mehr beeilen zu Ende zu kommen, zu welchem ich schon längst gekommen sein wollte.

Ich habe noch verschiedene andere Regeln parat, welche ich hier zugleich hinzugefügen würde, wenn es nicht ratsam wäre, sie für Zukünftiges aufzusparen: Natürlich ist unter diesen eine, durch welche ich alle irrationalen Wurzeln so von numeralen wie literalen Gleichungen finde; eine durch welche ich alle numeralen Gleichungen, die aus zwei rationalen erzeugt werden können, zu denselben reduzieren, ohne dass die Teiler des letzten Terms bekannt sind; ebenso eine andere, durch welche ich oft literale Gleichungen reduziere, und die darin besteht, dass ich den einen oder anderen Buchstaben $= 0$ oder $=$ einer anderen beliebigen Größe setze, und dass ich versuche die daher resultierende Gleichung zuerst zu reduzieren, und danach auch die vorgelegte Gleichungg durch diese. Eines Beispiels wegen möchte ich diese folgende Regel hinzufügen

Regel

durch welche alle rationalen Gleichungen, die keine Brüche enthalten und reduziert werden können, reduziert werden können, wenn durch Setzen von einem oder mehreren Buchstaben $= 0$ oder $=$ einer anderen beliebigen Größe daher eine Gleichung resultiert, die nur eine Dimension kleiner und irreduzibel ist.

Eines Beispiels wegen habe man diese Gleichung

$$\begin{aligned} x^3 - 5axx &+ 6bbx - 18abb = 0 \\ &- 9bc \quad - 9a^3 \\ &- 9aa \quad + 27abc \end{aligned}$$

wenn in dieser $a = 0$ gesetzt wird, entspringt diese

$$\begin{aligned} & x^3 + 6bbx - 9bcx = 0 \\ \text{oder} \quad & xx + 6bb \quad - 9bc \quad = 0 \end{aligned}$$

welche nicht reduziert werden kann. Aber die Regel, durch welche ich die Reduktion der vorgelegten Gleichung schon durchgeführt habe, ist eine solche:

Man teile durch den letzten Term der entstandenen Gleichungen, wenn er nicht aus verschiedenen Teilen oder Gliedern besteht, (Teiler oder Glieder nenne ich die Größen, die im selben Term mit den Zeichen $+$ oder $-$ miteinander verknüpft werden) *oder sonst durch ein beliebiges Glied des letzten Terms*, (so wie hier durch $+6bb$ oder $-9bc$) *alle Glieder des letzten Terms der vorgelegten Gleichung, welche auch immer durch jenes geteilt werden können, und man addiere jenen Quotienten, ob es einer oder mehrere waren, zur Größe x und die vorgelegte Gleichung wird durch diese Summe geteilt werden können.*
Wie in diesem Beispiel, indem man $-18abb$ durch $+6bb$ teilt, der Quotient $-3a$

entsteht, welcher zu x zu addieren ist, und weil in der vorgelegten Gleichungen unter den Gliedern des letzten Terms man kein anderes hat, welches durch $+6bb$ teilbar ist, entsteht $x - 3a$, was die vorgelegte Gleichung teilen können wird. Oder wenn ein anderes Glied der enstandenen Gleichung angenommen worden wäre, nämlich $-9bc$, wäre gleichermaßen $-3a$ hervorgegangen, weil allein $+27abc$ von den Gliedern des letzten Terms in der vorgelegten Gleichung gefunden wird, welches durch $-3a$ geteilt werden kann.
Bemerke, dass durch diese Methode, während ich einen Buchstaben oder mehrere $= 0$ oder $=$ einer anderen beliebigen Größe setze, nicht nur rationale Wurzeln von literalen Gleichungen, sondern auch irrationale so von literlaen wie von numeralen Gleichungen gefunden werden können. Denn auch die Regeln, mit deren Hilfe man die Wurzeln von kubischen Gleichungen findet, welche Cardano Scipione del Ferro zuschreibt, können mit dieser Methode gefunden werden, welche eine andere ist als die, die in Regel 21 gezeigt worden ist.

Bisher habe ich Gleichungen nur absolut betrachtet, nun ist noch übrig, dass ich sie auch relativ, indem sie auf das Problem bezogen werden, aus welchem sie entstehen, betrachte.

Aber bevor ich dies angehe, ist noch ein wenig über die Regeln, welche ich bisher angegeben habe, zu sagen. Jene sind nämlich von zwei Arten, denn manche lehren in bestimmten Fällen, dass die vorgelegte Gleichung *entweder nicht reduzibel ist, oder inwieweit sie durch solche nicht reduzibel ist*, wie Regel 1 und 2, und 13, 14 und 15. Andere lehren hingegen, *auf welche Weise Gleichungen reduziert werden müssen, welche wir wissen reduzibel zu sein, entweder durch eine bestimmte, in welcher ein bestimmter Term gegeben oder* $= 0$ *ist*, wie es Regel 9 und 11 tun, *oder durch eine bestimmte rationale*, wie es Regel 16 und 17 sind, *oder schließlich durch andere.* Aber weil oft im Verborgenen liegt, ob die vorgelegte Gleichung oder die, die aus einem gewissen Problem hervorgegangen ist, reduzibel ist oder nicht, ist, um dies zu herauszufinden, eine bestimmte Ordnung einzuhalten. Und in Bezug auf diese Regeln schätze ich die folgende als die beste ein: Ich würde zuerst mithilfe der ersten Regeln untersuchen, ob die Gleichung irreduzibel ist; das ist bei irreduziblen Gleichungen meistens auf den ersten Blick klar, oder zumindest größtenteils, sodass in einem solchen Fall oft viel Arbeit vermieden wird. Aber wenn dies nicht direkt klar ist, würde ich zu Regel 11 übergehen (besonders wenn der letzte Term der Gleichung viele Teiler oder solche, die schwer zu finden sind, zulässt, oder wenn die Gleichung gewisse surdische oder gebrochene Größen enthält) durch welche alle Gleichungen reduziert werden können, die durch eine andere teilbar sind, in welcher eine oder mehrere Größen fehlen, ob man die Gleichung nach der Unbekannten oder einer bekannten Größe ordnet, die als Unbekannte betrachtet wird.

Und so können fast alle literalen und reduziblen Gleichungen und die meisten numeralen Gleichungen reduziert werden. Wenn aber auf diese Weise die Reduktion nicht gelingt, würde ich sie durch die übrigen Regeln ermitteln. Hier könnten auch einige Dinge über die Anzeichen angeführt werden, an denen erkannt wird, ob eine Gleichung reduzibel ist oder nicht. Aber dazu wird bereits für die Grundzüge mehr an Ruhe und Geduld verlangt als mir freilich gegenwärtig zur Verfügung steht.

Was also den anderen Teil der Reduktionen betrifft, welcher auf das Problem bezogen wird, aus welchem die Gleichung abgeleitet ist, könnten noch viele Dinge gesagt werden, so über *das Finden* der letzten Gleichungen (in welchen alle Bedingungen des Problems enthalten sind), wodurch alle oder zumindest viele Reduktionen vermieden werden können, wie *über andere Reduktionen, die oft kürzer als jene oben beschrieben.* Denn was das erste betrifft, lehrt die Erfahrung, dass es in fast allen Problemen viele und verschiedene Arten gibt, die letzte Gleichung zu finden und zu einer Gleichung von weniger Dimensionen zu gelangen, wenn du dieser statt einer anderen Methode folgst. Indem man aber nicht nur eine verschiedene sondern auch diese Methode benutzt, wird man schließlich zu Gleichungen von mehr oder weniger Dimensionen gelangen. Und so wirst du auf dem kürzeren und leichteren Weg nicht nur viel Arbeit beim Finden der letzten Gleichung sparen, sondern auch sehr schwer zu findenden Reduktionen, welche andernfalls, wenn du zu höheren Gleichungen geführt worden wärst, zu suchen gewesen wären, aus dem Weg gehen.
Was das andere betrifft, so hast du dafür ein Beispiel von mir, wo nämlich die Gleichungen aller einem Kreis einbeschriebenen geordneten Formen gefunden werden, welches Beispiel nämlich darin besteht, dass, obwohl du die letzte Gleichung, die alle Bedingungen des Problems einschließt, hast, zusätzlich noch eine andere, mit einer anderen Methode, findest, die ebenso alle Bedingungen erfasst, sodass, weil du so zwei Gleichungen, die dieselbe unbekannte Größe einschließen, erhälst, selbige sooft wie möglich voneinander subtrahierst, oder was dasselbe ist, deren gemeinsamen Teiler findest, so wie ich es dann beim Finden jener Gleichungen hinreichend detailiert gezeigt habe.
Und die Nützlichkeit dieser Methode erstreckt überaus weit, besonders auf schwierigere Probleme, deren Gleichungen zu vielen Dimensionen ansteigen.

Denn oftmals, wenn du deren Reduktion durch die vorhergehenden Regeln untersuchst, würdest du Ewigkeiten brauchen, was du ansonsten, wenn du diesen Weg befolgst, kurz, und wie es ich ausdrücken möchte, auf einen Schlag erledigen kannst.
Weil also beide Arten und die Reduktionen im Prinzip ganz oder zumindest teilweise zu vermeiden und sie in vielen Fällen noch schneller als durch die gelehrten Regeln zu finden, von größerer Bedeutung ist, als dass es hier entsprechend behandelt werden kann und ich durch das Schreiben, du durch das Lesen, müde sind, ist es besser, dass wir hier aufhören und ein wenig zur Ruhe kommen, und die übrigen Dinge bei entsprechender Gelegenheit wieder angehen.

Bis dahin, sei gegrüßt und bis bald

Geschrieben in Amsterdam am ersten Tag der Iden des Juli im Jahre 1657.